转移矩阵Note

设有 N 层介质，半径由外向内依次为 $R_1, R_2, \cdots, R_N$，磁导率依次为 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N$。假设外场均匀，则每一层的通解均为

$$\varphi_l = (c_l r + d_l r^{-2})\cos\theta,\ \ l = 1, 2, \cdots, N$$

在每个层与层的交界上，都满足相应的衔接条件

$$\varphi_l |_{r=R_l} = \varphi_{l+1} |_{r=R_l},\quad \mu_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} |_{r=R_l} = \mu_{l+1} \frac{\partial \varphi_{l+1}}{\partial r} |_{r=R_l}$$

将通解带入，可得出各层系数满足下面的线性方程组

$$\begin{pmatrix} R_l & R_l^{-2} \\ \mu_l & -2\mu_l R_l^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_l \\ d_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_l & R_l^{-2} \\ \mu_{l+1} & -2\mu_{l+1} R_l^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{l+1} \\ d_{l+1} \end{pmatrix}$$

由此可得第 l 层和第 $l+1$ 层的关系

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_{l+1} \\ d_{l+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_l & R_l^{-2} \\ \mu_{l+1} & -2\mu_{l+1} R_l^{-3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R_l & R_l^{-2} \\ \mu_l & -2\mu_l R_l^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_l \\ d_l \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\mu_{l+1}{}^{-1} R_l^3 & R_l^2 \\ \mu_{l+1}{}^{-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_l & R_l^{-2} \\ \mu_l & -2\mu_l R_l^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_l \\ d_l \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\mu_{l+1}{}^{-1} R_l^4 + \mu_l R_l^2 & -\mu_{l+1}{}^{-1} R_l - 2\mu_l R_l^{-1} \\ \mu_{l+1}{}^{-1} R_l + 2\mu_l & \mu_{l+1}{}^{-1} R_l^{-1} - 4\mu_l R_l^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_l \\ d_l \end{pmatrix} \\
&= T_{l+1,l} \begin{pmatrix} c_l \\ d_l \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

其中

$$T_{l+1,l} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\mu_{l+1}{}^{-1} R_l^4 + \mu_l R_l^2 & -\mu_{l+1}{}^{-1} R_l - 2\mu_l R_l^{-1} \\ \mu_{l+1}{}^{-1} R_l + 2\mu_l & \mu_{l+1}{}^{-1} R_l^{-1} - 4\mu_l R_l^{-3} \end{pmatrix}$$

为第 l 层介质到第 $l+1$ 层介质的转移矩阵。按照这种方法一层层进行运算，可得第 N 层与第 1 层的关系为

$$\begin{pmatrix} c_N \\ d_N \end{pmatrix} = \prod_{l=1}^{N-1} T_{l+1,l} \begin{pmatrix} c_l \\ d_l \end{pmatrix}$$

根据这种方法，可以较方便地求出最外层和最内层之间的系数关系。事实上，当 φ 的阶数更高时，同样可以建立如下形式的转移矩阵方法

$$\begin{pmatrix} c_{N1} \\ d_{N1} \\ c_{N2} \\ d_{N2} \\ \vdots \\ c_{Nn} \\ d_{Nn} \end{pmatrix} = \prod_{l=1}^{N-1} T_{l+1,l} \begin{pmatrix} c_{11} \\ d_{11} \\ c_{12} \\ d_{12} \\ \vdots \\ c_{1n} \\ d_{1n} \end{pmatrix}$$

此时$T_{l+1,l}$为一$2n\times 2n$阶方阵。

下面用此转移矩阵方法求解问题（2）。可知最内层和最外层的关系为

$$\begin{pmatrix} c_3 \\ d_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -\mu_2^{-1}R^4+\mu_1R^2 & -\mu_2^{-1}R-2\mu_1R^{-1} \\ \mu_2^{-1}R+2\mu_1 & \mu_2^{-1}R^{-1}-4\mu_1R^{-3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mu_1^{-1}R'^4+\mu R'^2 & -\mu_1^{-1}R'-2\mu R'^{-1} \\ \mu_1^{-1}R'+2\mu & \mu_1^{-1}R'^{-1}-4\mu R'^{-3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} T_{11}S_{11}+T_{12}S_{21} & T_{11}S_{12}+T_{12}S_{22} \\ T_{21}S_{11}+T_{22}S_{12} & T_{21}S_{12}+T_{22}S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

根据边界条件，$c_1=-H_0$，$d_3=0$，因此可得到关于c_3,d_1的两条方程

$$c_3=\frac{1}{9}\left[-\left(T_{11}S_{11}+T_{12}S_{21}\right)H_0+\left(T_{11}S_{12}+T_{12}S_{22}\right)d_1\right]$$
$$0=-\left(T_{21}S_{11}+T_{22}S_{21}\right)H_0+\left(T_{21}S_{12}+T_{22}S_{22}\right)d_1$$

解得

$$d_1=\frac{\left(T_{21}S_{11}+T_{22}S_{21}\right)H_0}{\left(T_{21}S_{12}+T_{22}S_{22}\right)}$$
$$=H_0\frac{\left(-\mu_2^{-1}R+2\mu_1\right)\left(-\mu_1^{-1}R'^4+\mu R'^2\right)+\left(\mu_2^{-1}R^{-1}-4\mu_1R^{-3}\right)\left(-\mu_1^{-1}R'+2\mu\right)}{\left(-\mu_2^{-1}R+2\mu_1\right)\left(-\mu_1^{-1}R'-2\mu R'^{-1}\right)+\left(\mu_2^{-1}R^{-1}-4\mu_1R^{-3}\right)\left(-\mu_1^{-1}R'^{-1}-4\mu R'^{-3}\right)}$$

因此体系的有效偶极矩为

$$\vec{m}=4\pi\vec{H}_0\frac{\left(-\mu_2^{-1}R+2\mu_1\right)\left(-\mu_1^{-1}R'^4+\mu R'^2\right)+\left(\mu_2^{-1}R^{-1}-4\mu_1R^{-3}\right)\left(-\mu_1^{-1}R'+2\mu\right)}{\left(-\mu_2^{-1}R+2\mu_1\right)\left(-\mu_1^{-1}R'-2\mu R'^{-1}\right)+\left(\mu_2^{-1}R^{-1}-4\mu_1R^{-3}\right)\left(-\mu_1^{-1}R'^{-1}-4\mu R'^{-3}\right)}$$

当

$$\left(-\mu_2^{-1}R+2\mu_1\right)\left(-\mu_1^{-1}R'^4+\mu R'^2\right)+\left(\mu_2^{-1}R^{-1}-4\mu_1R^{-3}\right)\left(-\mu_1^{-1}R'+2\mu\right)=0$$

时，偶极矩消失，此时

$$\mu=\frac{R^4R'^4-2\mu_1\mu_2R^3R'^4-R^2R'+4\mu_1\mu_2R'}{-\mu_1R^4R'^2+2\mu_1^2\mu_2R^3R'^2+2\mu_1R^2-8\mu_1^2\mu_2}$$

因此，可以通过适当调节外层介质，使得介质球层失去对外场的调制作用，变得“透明”。