关于电容系数线性叠加原理的简单证明
和电容系数正负的确定。

在很多电动力学书本上，都会说，显然，电容系数的作用是线性叠加的。我认为能够这样说的原因是，只要利用简单的电磁学知识，就可以证明这一点。

要证明线性叠加原理，只要证明，对于导体系 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\cdots\ A_n$，其任意两个个静电平衡状态线性叠加都可以形成新的静电平衡状态。这里的线性叠加包括电荷分布、电场、电势的线性叠加。

构造导体系的两个静电平衡态，其在全空间的电荷密度分布分别是 $r_a(\mathbf{r})$ 和 $r_b(\mathbf{r})$，将这两个电荷分布线性叠加，有 $r_c(\mathbf{r}) = r_a(\mathbf{r}) + r_b(\mathbf{r})$

由于静电平衡的条件是 $\mathbf{E}_{\mathbf{in}} = \mathbf{0}$，即，对于导体内部的任意一点，有：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{r(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dt' = \mathbf{0}$$

那么对于两个静电平衡态的叠加态 $r_c(\mathbf{r})$，代入 $r_c(\mathbf{r}) = r_a(\mathbf{r}) + r_b(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_3(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{r_c(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dt' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(r_a(\mathbf{r}') + r_b(\mathbf{r}'))(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dt' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{r_a(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dt' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{r_b(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dt' \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

所以，**任意两个静电平衡分布态的线性叠加态仍然是静电平衡态。**

这里我们可以看出，电场也是线性叠加的。

由电荷分布和电场分布是线性叠加的，且积分运算是线性运算，电势是电场从无穷远处开始的积分，我们可以知道，电势也是线性叠加的。

即

$$
\begin{aligned}
j_c(\mathbf{r}) &= -\int_{\text{无穷远}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}_c(\mathbf{r}')\mathrm{g}d\mathbf{l}' \\
&= -\int_{\text{无穷远}}^{\mathbf{r}} (\mathbf{E}_a(\mathbf{r}') + \mathbf{E}_b(\mathbf{r}'))\mathrm{g}d\mathbf{l}' \\
&= -\int_{\text{无穷远}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}_a(\mathbf{r}')\mathrm{g}d\mathbf{l}' - \int_{\text{无穷远}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}_b(\mathbf{r}')\mathrm{g}d\mathbf{l}' \\
&= j_a(\mathbf{r}) + j_b(\mathbf{r})
\end{aligned}
$$

（由电荷分布线性叠加得到电势、电场的线性叠加是非常基础的问题）

由此就可以轻松地得到电容的线性关系：

所有的由 N 个导体构成的导体系的静电平衡态都可以分解成 N 个静电平衡态的线性叠加，其中第 j 个静电平衡态只有第 j 个导体带有净电荷 Q_j，其他导体不带有净电荷。那么定义电容系数的逆阵元：

$$j_{ij} = \mathrm{C}_{ij}^{-1} Q_j$$

这里，第一个脚标 i 表示第 i 个导体，第二个脚标 j 表示第 j 个静电平衡态，也就是只有第 j 个导体带电的态。

根据静电平衡态的电荷分布和电势分布都是满足线性叠加的，必然有总的静电平衡态是这 N 个静电平衡态的线性叠加，即

$$j_i = \sum_{i=1}^{N} j_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{C}_{ij}^{-1} Q_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① $$

这样，我们使用十分简单的方法就证明了每个导体上的带电量对任意

导体电势的贡献是线性叠加的。

如果我们使用另外一种方法来分解一般的静电平衡态，不再按照净电荷分解，而是按照电势分解。即，将 N 个导体的静电平衡态分解为 N 个静电平衡态，第 j 个静电平衡态只有第 j 个导体具有电势 j_j，其他导体都接地，那么定义电容系数

$$Q_{ij} = \mathrm{C}_{ij} j_j$$

同样根据电势和电荷分布的线性叠加性，将这 N 个态叠加，有：

$$Q_i = \sum_{i=1}^{N} Q_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{C}_{ij} j_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

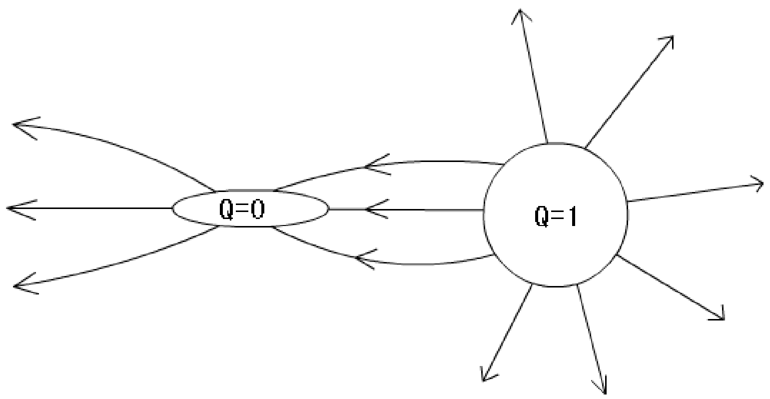
由①和②可以知道 C_{ij}^{-1} 是 C_{ij} 构成的矩阵的逆阵元。

下面寻找电容系数正负号的关系。

首先研究 C_{ij}^{-1}。

这里，我们考虑上面使用过的第 j 个导体带有单位电量的正电荷，其他导体均不带有电荷的情况。这时，必然由第 j 个导体发出电场线，经由其他导体，最终指向无限远。（因为其他导体收到和发出的电场线相等，所以我们可以认为电场线只是经过了它们。）

第 j 个导体显然电势是正的（它发出的电场线都指向无限远）。除去它之外的导体电势也必然是正的。因为电场线从第 j 个导体出发，经过它们，到达无限远，那么，只要找到一条从它们出发指向无限远的电场线进行积分，必然可以得到其电势是正的。



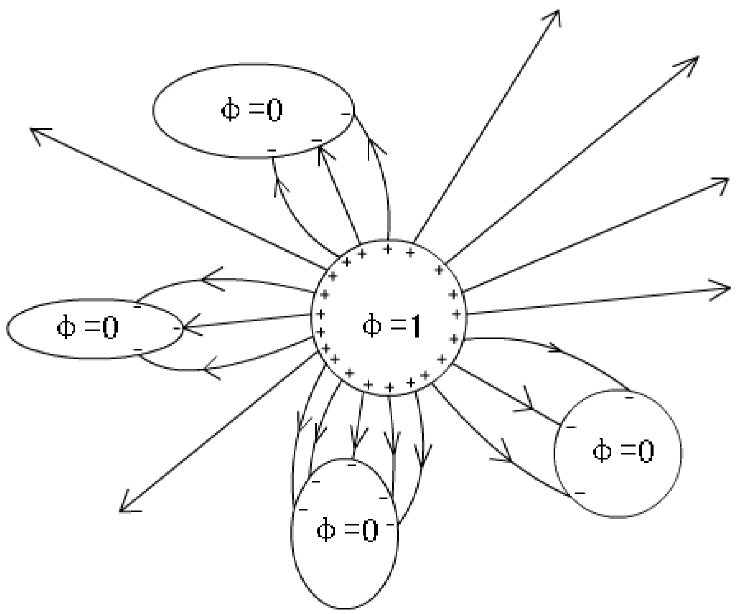
这样可以得到关系式：$\varphi_j = C_{jj}Q_j > \varphi_{i\neq j} = C_{ij}Q_j > 0$

所以我们有$\boxed{C_{ij}^{-1} > 0 \text{总是成立}}$。

然后，再研究C_{ij}

考虑上面用到的第二种分解方法，只有第 j 个导体具有单位大小的正电势，其他导体电势均为 0。由于只有第 j 个导体电势为正，整个空间的电场线均来源于此，则其必然带有正电荷。故$\boxed{C_{ii} > 0}$

由于其他导体电势均为 0，则不存在一条电场线连接它们或者从它们发出指向无穷远。所以，其他导体只能收到来自第 j 个导体的电场线，不发出电场线（只要发出，不论指向无穷远还是指向其他导体，都是不成立的）。只收到电场线，则其表面全部都是负电荷，故$\boxed{C_{ij} < 0 (i \neq j)}$。



最终，我们证明了线性叠加原理可以应用到电容系数和逆电容系数上，即公式 $j_i = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{C}_{ij}^{-1} Q_j$ 和 $Q_i = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{C}_{ij} j_j$ 是成立的，并且找到了这两个公式求和中每个被求和的态的物理意义。然后利用对其被求和态的具体分析，得到了电容系数和感应系数的正负关系，即有：

$\mathrm{C}_{ij}^{-1} > 0$; $\mathrm{C}_{ii} > 0$, $\mathrm{C}_{ij} < 0 (i \neq j)$