周磊老师：

好！

上次的信可能意思表达得不清楚，但是通过和您、以及和部分同学的讨论我还是不十分明白介质中电磁场能量的表述形式。我整理了您课件那一部分中我不是十分了然的内容，总结成几个要点，再向您讨教。为了表达上更加清楚，这次用中文给您写信，用语上有什么不恰当的地方请您包涵。

首先，（$\vec{j}_p+\vec{j}_m$）$\cdot\vec{E}$ **对应的是电磁场对电磁介质中的束缚电荷（流）所做的功，这部分功转化成介质中电荷拉开后的势能，以及这些电荷跟随电场运动时的机械动能。**说这部分功中包含介质中电荷拉开后的势能是不准确的。如下式，这一部分描述的就是动能增加的功率。至于电荷相对位置的改变后引起的相互作用能的改变或者说电磁能量的改变，其本身已经被计入到$\int_\Omega \frac{1}{2}(\varepsilon_o \vec{E}^2+\frac{1}{\mu_o}\vec{B}^2)d\tau$的变化率里面去了。关于这个问题，下面还将谈到时会有更详细的描述。

$$\vec{j}_p\cdot\vec{E}=\rho_P\vec{E}\vec{v}=\frac{1}{dt}(\vec{F}\vec{dl})=\frac{1}{dt}(d\frac{1}{2}Mv^2)$$

其次，**我们可以将第 2 项功对应的能量 – 极（磁）化能 – 归于电磁场在介质的能量中，而只考虑电磁场对第一项的贡献。**按照您的思路我们不妨显式计算什么叫做“电磁场能量以及磁极化能的总和”的变化率。

$$\frac{dW_t}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{1}{2}(\varepsilon_o\vec{E}^2+\frac{1}{\mu_o}\vec{B}^2)d\tau+\int_\Omega(\vec{j}_p+\vec{j}_m)\vec{E}\,d\tau$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{1}{2}(\varepsilon_o\vec{E}^2+\frac{1}{\mu_o}\vec{B}^2)d\tau+\int_\Omega(\frac{\partial}{\partial t}\vec{P}+\nabla\times\vec{M})\vec{E}\,d\tau$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}+\frac{1}{\mu_o}\vec{B}^2)d\tau+\int_\Omega\nabla(\vec{M}\times\vec{E})+\vec{M}(\nabla\times\vec{E})d\tau$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}+\frac{1}{\mu_o}\vec{B}^2)d\tau+\int_\Omega\nabla(\vec{M}\times\vec{E})-\vec{M}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}d\tau$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}+\vec{B}\vec{H})d\tau+\int_\Omega\nabla(\vec{M}\times\vec{E})d\tau$$

很显然的，上面结果说明了所谓的“电磁场能量以及磁极化能的总和”应该有

如下的形式，我们明显没有任何理由将下式的第二项“以它可以被写成面积分的形式为理由而扔掉”。

$$W_t=\int_\Omega \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}+\vec{B}\vec{H})d\tau+\int dt(\int_\Omega \nabla(\vec{M}\times\vec{E})d\tau)$$

相反得，仔细分析第二项是有物理意义在里面的。将这一项重新拆写出来可以看到其中有一部分是 $\int_\Omega \vec{j}_m\vec{E}\,d\tau$，是用来增加磁化电流的动能的。

$$-\int_\Omega \nabla(\vec{E}\times\vec{M})d\tau=\int_\Omega(\nabla\times\vec{M})\vec{E}\,d\tau-\int_\Omega(\nabla\times\vec{E})\vec{M}\,d\tau=\int_\Omega \vec{j}_m\vec{E}\,d\tau-\int_\Omega(\nabla\times\vec{E})\vec{M}d\tau$$

而另一部分可以通过将 $\vec{M}$ 视为为分子环电流来理解。由下式可见，变化的磁场激发了分子环流中的感生电场而 $-\int_\Omega(\nabla\times\vec{E})\vec{M}d\tau$ 正是为了维持分子电流的功率（JACKSON 书 212 页）。它是电磁场能量的一部分而并不是对磁化电荷机械能的增加。

$$-\int_\Omega(\nabla\times\vec{E})\vec{M}d\tau=-\int_\Omega(\nabla\times\vec{E})\vec{I}\vec{S}d\tau=-\int_\Omega(\vec{S}\,\nabla\times\vec{E})Id\tau=\int_\Omega\frac{\partial(\vec{B}\vec{S})}{\partial t}Id\tau=\int_\Omega d\tau(\xi I)$$

再回过头来，$\int_\Omega \nabla(\vec{M}\times\vec{E})d\tau$ 的意义十分清晰，且只有将 $\int_\Omega \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}+\vec{B}\vec{H})d\tau$ 与 $\int dt(\int_\Omega \nabla(\vec{M}\times\vec{E})d\tau)$ 加在一起才是您要的“总能”。将 $\vec{M}$ 视为 $\vec{B}$，$-\int_{\partial\Omega}(\vec{E}\times\vec{M})d\vec{S}$ 确实就像是流入区域 Ω 内电磁介质中的某种能流密度，但并不是所有的能流密度都要写在一起。其中的一部分是用来增加磁化电流的动能的，这一部分本身不是电磁场的能量，是您所说的要**归于电磁场在介质的能量中的第 2 项功对应的能量的其中之一**。另一部分是为了维持分子电流的，它本就属于电磁场这个整体，是磁介质与自由电荷自由电流之间相互作用的结果。而这一部分则被硬生生地从 $\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{1}{2}(\varepsilon_o\vec{E}^2+\frac{1}{\mu_o}\vec{B}^2)d\tau$ 中拆了出来。

$$-\int_{\partial\Omega}(\vec{E}\times\vec{M})d\vec{S}=\int_\Omega \vec{j}_m\vec{E}\,d\tau+\int_\Omega d\tau(\xi I)$$

所以，我的观点是：（1）$-\int\limits_{\partial\Omega}(\vec{E}\times\vec{M})d\vec{S}$ 被移调后 $\frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}+\vec{B}\vec{H})$ 根本就不是所谓的什么“总的能量”，它的存在就是使得对于自由电流成立下式。

$$\int\limits_{\Omega}\vec{E}\,\vec{j}_f d\tau+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}+\vec{B}\vec{H})d\tau=\int\limits_{\partial\Omega}(\vec{E}\times\vec{H})d\vec{S}$$

（2）电磁场的能量就是 $\int\limits_{\Omega}\frac{1}{2}(\varepsilon_o\vec{E}^2+\frac{1}{\mu_o}\vec{B}^2)d\tau$，且永远是这一形式。它包括了您前面说的**介质中电荷拉开后的势能**、自由电荷电流本身所激发的场能量、磁化电流本身所蕴含的能量以及自由电荷电流与磁极化电荷电流之间相互作用的能量。

到这里，就不能不去看 JACKSON 书 165 页中的描述了。原则上讲，我是不能对他的书说三道四的，因为我没有从头到尾读到 165 页所以有的理解是片面的。故而凡是我所没有把握对或错的内容，我都以这种字体来书写。宋体的部分则说明我确定对错并为我所陈述的内容负责。

首先，JACKSON 是没有什么极化电荷和自由电荷之分的，他的书里 ρ 就是自由电荷。其次，JACKSON 认为“为了 bring real charge into position，外场还需要 produce a certain state of polarization 而付出一定的能量”，用您的话讲就是付出**介质中电荷拉开后的势能**。最后通过一番我认为有问题的证明，JACKSON 在书中 166 页说只要 medium 的 behavior 是 linear 的，外场 bring real charge into position 要做的总功是 $W=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\rho_f\varphi_t d\tau$ 。

您大可掏出他的书来读读看，比一比看看我的英文阅读是不是有什么不对的地方。再来看问题出在哪里。首先，不管是自由电荷还是极化电荷，在一定的势场中使电荷这种物质的密度提高 $\delta\rho$ 所需要的能量是 $\delta W=\int\limits_{\Omega}\delta\rho\varphi_t d\tau$。这种变分表达至少在物理学中是通用的。而今，JACKSON 认为自由电荷密度提高 $\delta\rho_f$ 所需要的能量是 $\delta W=\int\limits_{\Omega}\delta\rho_f\varphi_t d\tau$ 就是不对的。不对在哪里？

$$\delta\rho_P=-\nabla\delta\vec{P}=-\nabla(\delta\vec{D}-\varepsilon_o\delta\vec{E})=-\nabla(\delta\vec{D}-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\delta\vec{D})=(\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}-1)\nabla\delta\vec{D}=(\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}-1)\delta\rho_f$$

$$\delta W=\int_{\Omega}\delta\rho\varphi_t d\tau=\int_{\Omega}(\delta\rho_f+\delta\rho_P)\varphi_t d\tau\neq\int_{\Omega}\delta\rho_f\varphi_t d\tau$$

一个口口声声说要算 produce a certain state of polarization 对 linear medium 带来的 work 的人，却边算边就把他该干的事情给忘掉了。说 $W=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\vec{E}\vec{D}d\tau=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\rho_f\varphi_t d\tau$ 是这个电磁介质中总能量（静电学，没有电荷运动，总能就是电场能）当然是不对的。我前面已经指出来了，总的电场能永远只有一种表达。

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_o\int_{\Omega}\vec{E}^2 d\tau=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\rho_t\varphi_t d\tau$$

不论是在介质中还是在真空中，形式都是一样的，这是因为介质中的 $\vec{E}$ 本身就包括了极化电荷激发的场能的贡献。在给您的第一封信里我就说了，从上面的这对矛盾中可以看出来，$\frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}+\vec{B}\vec{H})$ 代表的含义是模糊的，根本就不是什么“总能量密度”。在静电学中，因为没有电荷运动，您要的“总能”就是电场能。可是 $\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}$ 实际上是在保持极化电荷的末状态不动的情况下将自由电荷 into position 要做的功，再加上自由电荷与极化电荷相互作用能的一半。（参阅前信）

最后，来看对于您的两个问题。第一题我已经用我的看法仔细描述了所谓 $\vec{M}\times\vec{E}$ 是什么意思，并且强调了不可以“因为它可以被写成面积分的形式”就强行向能流密度里“塞”。它是有物理意义的并且包含了正是您希望**归于电磁场在介质的能量中的第2项功对应的能量**以及一部分电磁场本身的能量。对于第二问，我认为：

（3）看不清您所谓的“极磁化的能量”的含义，**介质中电荷拉开后的势能**本就是电磁场能量的一部分，极化电荷有相互作用所以我们用场来描述这种相互作用并以场能说明这种相互作用的强弱，它是电磁场不可分割的一部分。显然，JACKSON 在166页到167页算的就是一个特例中这个**介质中电荷拉开后的势能**，并且由于他总能的公式用错了，结果很难让人觉得是对的。对于您所谓的“不假思索”，在我看来本身就是对 $\frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}+\vec{B}\vec{H})$ 不同的理解导致的。事实上，如果我们定义“极磁化的能量”为将电磁介质有无穷远处运来所需要做的功，即使之“极磁化所需的能量”。那么这个能量明显是很难算的，它与极磁化的过程、自由电荷在这过程中的分布的

改变有关。这也是JACKSON的结果尽管有问题但里面有个十分合理的$\vec{E}_o$之原因。

上述我的理解对于后面的理论的运行是没有矛盾的，但是与几乎所有的TEXTBOOK都是不一样的。在他们的眼里，指定了$\frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}+\vec{B}\vec{H})$就是一个含混不清的所谓“总能量”的表达。而且，每个人理解的“总能量”还都不一样。我不知道，上面的这些理解里面有什么不对的或者“我被搞糊涂”的地方。事实上，尽管大一的时候，我不是物理系的学生也没听过您上的课，但是对上面的这个问题的理解与您至少在结果上是一致的，并且在直观上也有您所说的这样一幅图像，但是当我仔细思考却认为它是不对的。我希望您是有着这个毅力看我写到这里，如果您不是太忙或者觉得还是有某些价值将我的misunderstanding做一番纠正，您可以回一封短信或者在某个确定的office hour允许我再聆听您的教诲。