n 维空间的耦合场 Stokes 公式

郑晨[1]，$\boxed{\text{Gauss}}$，$\boxed{\text{Stokes}}$，$\boxed{\text{Green}}$

1）（复旦大学物理系，上海，200433）

摘要：在空间维度变化时公式具有形式的连续性的前提下，首先建立 n 维空间的矢量的点乘与叉乘运算，然后建立 n 维空间的矢量场的散度与旋度公式，并提出维度塌缩公式，最后建立 n 维空间的耦合场 Stokes 公式。

关键词：n 维空间，矢量分析，Stokes 公式，Gauss 公式，Green 公式，耦合场，点乘，叉乘，旋度，散度，维度塌缩

目前数学及物理学中应用的矢量分析及场论公式都是在二维或三维空间中成立的，其实，它们都可以在空间维度变化时具有形式连续性的前提下，扩张到高维空间。下面，就来建立 n 维空间的矢量分析及 Stokes 公式。（本文着重讨论四维空间，更高维度的情况可以类推。）

大家都知道，在二维空间中的一个点可以用两个有序实数表示，这两个有序实数称为此点的坐标，同理，在 n 维空间中的一个点的坐标由 n 个有序实数表示，记为

$\vec{A}=(a_1,a_2\cdots a_n)$。

首先，定义 n 维空间的点乘与叉乘运算。在二维空间中的点乘定义为

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2$$

其中 $\vec{A}=(a_1,a_2)$，$\vec{B}=(b_1,b_2)$，其结果是一个标量，在三维空间中点乘也定义为一个标量，即设 $\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{B}=(b_1,b_2,b_3)$，有

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

由空间的维度变化时公式形式的连续性，可以合理地定义 n 维空间的点乘运算，与二维、三维相同，都为二元运算，而且结果同样是一个标量，即设 $\vec{A}=(a_1,a_2\cdots a_n)$，$\vec{B}=(b_1,b_2\cdots b_n)$，有

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

类似地，可以定义 n 维空间的 Laplace 算符及矢量场的散度：

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\cdots$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}a_1+\frac{\partial}{\partial y}a_2+\cdots$$

另外，定义 n 维空间两矢量正交为 $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$。

在三维空间中的叉乘运算是一个二元运算，而且结果是一个矢量，此矢量的方向定义为垂直于原矢量组成的平面，数学表达式为

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

如果在四维空间中存在二元的叉乘运算，就不能用上式定义，因为不能构造一个合理的行列式，而且在四维空间中，如果定义了一个二元的叉乘运算，结果也为一个矢量，这个矢量的方向是无法确定的，因为可以找到两个独立的垂直于两个原矢量组成的平面的方向，这是不符合集合论的要求的，所以只能根据叉乘运算另外一个性质来定义 n 维空间的叉乘运算——运算的结果与原矢量都正交。在四维空间中，定义三元运算 $\overline{ABC}$，结果为一矢量：

$$\vec{D}=\overline{ABC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{l}\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{vmatrix}$$

称之为四维空间的叉乘运算，可以验证 $\vec{D}$ 与 $\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$ 均正交：

$$\vec{D}\cdot\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{l}\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{vmatrix}\cdot(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}+a_4\vec{l})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{vmatrix}=0$$

其他的同理。用同样的方法可以定义五维空间的叉乘运算，这是一个四元运算：

$$\overline{ABCD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{l} & \vec{m}\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5\\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5\end{vmatrix}$$

而 $\overline{AB}$ 即为我们熟悉的 $\vec{A}\times\vec{B}$。可见，n 维空间的叉乘运算是一个 n−1 元的运算，结果是一个矢量，它与原矢量均正交。另外，对于二维空间，叉乘变成了一个一元运算：

$$\overline{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j}\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}$$

$\underline{A}$与$\vec{A}$是正交的：

$$\underline{A}\cdot\vec{A}=(a_2\vec{i}-a_1\vec{j})\cdot(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})=0$$

这个运算相当于复平面中一个复数乘以$-i$的效果。

大家都知道，利用三维空间中的叉乘运算可以定义两矢量平行，即设$\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{B}=(b_1,b_2,b_3)$，若

$$\underline{\overline{AB}}=\vec{0}\text{（即}\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\text{）}$$

则$\vec{A}$与$\vec{B}$平行。在四维空间中，同样可以用$\frac{a_i}{b_i}=\frac{a_j}{b_j}(i=1,2,3,4;j=1,2,3,4;i\neq j)$定义两矢量平行，而利用叉乘运算可以定义三矢量共面，即设$\vec{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$，$\vec{B}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$，$\vec{C}=(c_1,c_2,c_3,c_4)$，若

$$\underline{\overline{ABC}}=\vec{0}$$

得$\begin{vmatrix}a_2 & a_3 & a_4\\ b_2 & b_3 & b_4\\ c_2 & c_3 & c_4\end{vmatrix}=0$等。

类似地，可以定义 n 维空间矢量场的旋度，在维度大于等于 4 的空间，旋度就不再是一个矢量场的性质了，例如在四维空间，旋度定义为

$$\underline{\overline{\nabla AB}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{l}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial w}\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial w}\\ a_2 & a_3 & a_4\\ b_2 & b_3 & b_4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial w}\\ a_1 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_3 & b_4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial w}\\ a_1 & a_2 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_4\end{vmatrix}\vec{k}-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{l}$$

它变成了两个矢量场共同的性质，与三维空间的情况相对应，可称之为**耦合场的旋度**。

根据之前的说法，在四维空间中不存在三维空间的叉乘运算，那么，在三维空间是否存在四维空间的叉乘运算呢？答案是存在。

四维空间的叉乘运算

$$\overline{ABC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{l}\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{vmatrix}$$

若 A、B、C 的第四个分量都为 0，则这个运算可化为

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{l}\\ a_1 & a_2 & a_3 & 0\\ b_1 & b_2 & b_3 & 0\\ c_1 & c_2 & c_3 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\vec{l} \tag{1}$$

这正是我们所熟知的三维空间中的三重标积

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

可见，在三维空间中 $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$ 是一个标量，而在四维空间中，它变为了一个矢量，方向指向第四维。另外，三维空间中两个矢量的叉乘的大小代表两矢量围成的平行四边形面积，很容易证明，四维空间的叉乘的大小代表三个矢量围成的平行六面体体积，这也可以从三重标积的性质中看出。

下面约定一个记号“$\triangleright$”，称为**维度塌缩算符**，它代表将被作用的 n 维空间的矢量或矢量场的坐标的第 n 维分量变为 0。例如，对于(1)式，可以表示成

$$\triangleright\,\overline{ABC}=(A\cdot\overline{BC})\vec{l}$$

或者也可写为

$$\left|\triangleright\,\overline{ABC}\right|=(A\cdot\overline{BC})$$

这是一个很重要的公式，称为**维度塌缩公式**，类似地可以得到

$$\left|\triangleright\,\overline{\nabla AB}\right|=\nabla\cdot\overline{AB} \tag{2}$$

$$\left|\triangleright\,\overline{\nabla A}\right|=\nabla\cdot\overline{A}\text{（即}\left|\triangleright\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}\right|=\nabla\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j}\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\text{）} \tag{3}$$

这些也是很重要的公式，后面将会用到。

下面探讨 n 维空间的场论公式。三维空间的场论公式

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint \overline{\nabla A}\cdot d\vec{S} \qquad \text{（Stokes 公式）}$$

$$\oiint \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint \nabla\cdot\vec{A}dV \qquad \text{（Gauss 公式）}$$

及二维空间的场论公式

$$\oint Pdx+Qdy = \iint \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy \qquad \text{（Green 公式）}$$

是大家所熟知的，而且，对于 Gauss 公式，也能很容易地将其推广到 n 维空间（证略，详见参考文献[二]，以下的$\oint$ 、$\iint$ 分别代表 n-1 维的环路积分和 n 维的重积分），

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iint \nabla\cdot\vec{A}dV$$

其中dV为 n 维空间的体积微元，$d\vec{S}$为 n 维空间的面积微元。但是，Stokes 公式如何推广到 n 维空间呢？下面先根据空间维度变化时公式形式的连续性猜测一个自洽的结果，然后再证明这个结果的正确性。

Green 公式可以看成是二维的 Gauss 公式，因为将 Green 公式的形式修改一下，变为

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = \iint \nabla\cdot\underline{F}dS$$

其中$\vec{F}=(P,Q)$，$d\vec{l}=(dx,dy)$，这正是二维的 Gauss 公式。根据维度塌缩公式

$$\left|\rhd\,\overline{\nabla F}\right| = \nabla\cdot\underline{F}$$

将三维空间的 Stokes 公式两边作用维度塌缩算符，设矢量场$\vec{F}=(P,Q,R)$

$$\oint Pdx+Qdy+Rdz = \iint \overline{\nabla F}dS \tag{4}$$

$$\text{左边：}\rhd(\oint Pdx+Qdy+Rdz) = \oint Pdx+Qdy \tag{5}$$

$$\text{右边：}\rhd(\iint \overline{\nabla F}dS) = \iint \nabla\cdot\underline{F}dS' \tag{6}$$

$$\text{（即}\rhd(\iint\left[(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dy\wedge dz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dz\wedge dx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dx\wedge dy\right] = \iint(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy)\text{）}$$

由(4)、(5)、(6)式得

$$\oint Pdx+Qdy = \iint \nabla\cdot\underline{F}dS'$$

可见，作用维度塌缩算符的三维 Stokes 公式变为了二维 Gauss 公式，可以将上式等号左边的形式改写

$$\oint Pdx + Qdy = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint \overline{\underline{F}}\,\overline{\underline{dl}}$$

这是显然的，因为 $\vec{F} = (P,Q)$， $d\vec{l} =（dx, dy）$，

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = Pdx + Qdy$$

而 $\overline{\underline{F}} = (Q,-P)$，$\overline{\underline{dl}} = (dy,-dx)$，

$$\overline{\underline{F}}\,\overline{\underline{dl}} = Pdx + Qdy$$

所以

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = \overline{\underline{F}}\,\overline{\underline{dl}}$$

$\overline{\underline{dl}}$ 的几何意义是方向与 $d\vec{l}$ 垂直的线元。由以上的讨论可以推测，**四维空间的 Stokes 公式作用维度塌缩算符后变为三维 Gauss 公式**。三维的 Gauss 公式为

$$\oint \vec{C} \cdot d\vec{S} = \iint \nabla \cdot \vec{C} dV$$

设 $\vec{C} = \overline{\underline{AB}}$，上式变为

$$\oint \overline{\underline{AB}} \cdot d\vec{S} = \iint \nabla \cdot \overline{\underline{AB}} dV \tag{7}$$

根据维度塌缩公式，(7)式右边有

$$\iint \nabla \cdot \overline{\underline{AB}} dV \Rightarrow (\iint \overline{\underline{\nabla AB}} d\vec{V})$$

根据空间维度变化的连续性，可以推测(7)式左边有

$$\oint \overline{\underline{AB}} \cdot d\vec{S}$$

$$= \oint \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} dy \wedge dz - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} dz \wedge dx + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} dx \wedge dy$$

$$\Rightarrow (\oint \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} dy \wedge dz + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} dx \wedge dy + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} dx \wedge dz + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} dx \wedge dw + \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} dy \wedge dw + \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} dz \wedge dw)$$

所以，可以得到四维空间的 Stokes 公式为

$$\oint \overline{\underline{AB}} \cdot d\vec{S} = \iint \overline{\underline{\nabla AB}} d\vec{V}$$

其分量形式为

$$\oint \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} dy \wedge dz + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} dx \wedge dy + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} dx \wedge dz + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} dx \wedge dw + \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} dy \wedge dw + \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} dz \wedge dw$$

$$
= \iint \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{l} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} d\vec{V} \tag{8}
$$

其中 $d\vec{V}$ 是体积矢量。可以看到，三维的场论公式和四维的场论公式在形式上具有完美的连续性，两者的对比见表一。

表一、三维的场论公式与四维的场论公式对比

	n 维 Stokes 公式	$\longrightarrow$	n-1 维 Gauss 公式
n=3	$\oint \overline{A}\cdot\overline{dl} = \iint \overline{\nabla A}\cdot d\vec{S}$	作用 维度塌 缩算符	$\oint \overline{Adl} = \iint \nabla\cdot\overline{A}dS$
n=4	$\oint \overline{AB}\cdot d\vec{S} = \iint \overline{\nabla AB}d\vec{V}$		$\oint \overline{AB}\cdot d\vec{S} = \iint \nabla\cdot\overline{AB}dV$ $(\oint \vec{C}\cdot d\vec{S} = \iint \nabla\cdot\vec{C}dV)$

（若 l 的参数方程为 $\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$，则 $\overline{dl}$ 的方向平行于 $\overline{\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial t}}$；若 S 的参数方程为 $\vec{R}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$，则 $d\vec{S}$ 的方向平行于 $\overline{\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial u}\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial v}}$；若 V 的参数方程为 $\vec{R}(u,v,t) = x(u,v,t)\vec{i} + y(u,v,t)\vec{j} + z(u,v,t)\vec{k} + w(u,v,t)\vec{l}$，则 $d\vec{V}$ 的方向平行于 $\overline{\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial u}\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial v}\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial t}}$。）

下面就来严格地证明这个公式。设

$$
\vec{A}(x,y,z,w) = (a_1(x,y,z,w), a_2(x,y,z,w), a_3(x,y,z,w), a_4(x,y,z,w))
$$

$$
\vec{B}(x,y,z,w) = (b_1(x,y,z,w), b_2(x,y,z,w), b_3(x,y,z,w), b_4(x,y,z,w))
$$

体积 V 的参数方程为 $\vec{R}(u,v,t) = x(u,v,t)\vec{i} + y(u,v,t)\vec{j} + z(u,v,t)\vec{k} + w(u,v,t)\vec{l}$，此体积的单位法线矢量为 $\vec{n} = \dfrac{\overline{\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial u}\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial v}\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial t}}}{\left|\overline{\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial u}\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial v}\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial t}}\right|}$，设 $n = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k} + \cos\theta\vec{l}$，则

$$\cos\alpha=\frac{\dfrac{\partial(y,z,w)}{\partial(u,v,t)}}{\left|\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial u}\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial v}\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial t}\right|},\quad \cos\beta=-\frac{\dfrac{\partial(x,z,w)}{\partial(u,v,t)}}{\left|\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial u}\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial v}\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial t}\right|}$$

$$\cos\gamma=\frac{\dfrac{\partial(x,y,w)}{\partial(u,v,t)}}{\left|\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial u}\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial v}\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial t}\right|},\quad \cos\theta=-\frac{\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,t)}}{\left|\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial u}\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial v}\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial t}\right|}$$

将(8)式进一步化为

$$\oint\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}dy\wedge dz+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}dx\wedge dy+\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}dx\wedge dz+\begin{vmatrix}a_1 & a_4\\ b_1 & b_4\end{vmatrix}dx\wedge dw+\begin{vmatrix}a_2 & a_4\\ b_2 & b_4\end{vmatrix}dy\wedge dw+\begin{vmatrix}a_3 & a_4\\ b_3 & b_4\end{vmatrix}dz\wedge dw$$

$$=\iint\left(\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial w}\\ a_2 & a_3 & a_4\\ b_2 & b_3 & b_4\end{vmatrix}\cos\alpha-\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial w}\\ a_1 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_3 & b_4\end{vmatrix}\cos\beta+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial w}\\ a_1 & a_2 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_4\end{vmatrix}\cos\gamma-\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\cos\theta\right)dV$$

如果要证明(8)式只需证明

$$\oint\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}dx\wedge dy=\iint\left[\frac{\partial}{\partial w}\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\cos\gamma-\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\cos\theta\right]dV \qquad (9)$$

$$\oint\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}dy\wedge dz=\iint\left[\frac{\partial}{\partial w}\begin{pmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{pmatrix}\cos\alpha-\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{pmatrix}\cos\theta\right]dV$$

$$\oint\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}dx\wedge dz=\iint\left[-\frac{\partial}{\partial w}\begin{pmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{pmatrix}\cos\beta+\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{pmatrix}\cos\theta\right]dV$$

$$\oint\begin{vmatrix}a_1 & a_4\\ b_1 & b_4\end{vmatrix}dx\wedge dw=\iint\left[\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}a_1 & a_4\\ b_1 & b_4\end{pmatrix}\cos\beta-\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}a_1 & a_4\\ b_1 & b_4\end{pmatrix}\cos\gamma\right]dV$$

$$\oint\begin{vmatrix}a_2 & a_4\\ b_2 & b_4\end{vmatrix}dy\wedge dw=\iint\left[-\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}a_2 & a_4\\ b_2 & b_4\end{pmatrix}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}a_2 & a_4\\ b_2 & b_4\end{pmatrix}\cos\gamma\right]dV$$

$$\oint\begin{vmatrix}a_3 & a_4\\ b_3 & b_4\end{vmatrix}dz\wedge dw=\iint\left[\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}a_3 & a_4\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}\cos\alpha-\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}a_3 & a_4\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}\cos\beta\right]dV$$

即可，因为这些分量之和就是(8)式。下面只证明(9)式，其他等式可用相同的方法得到。而对于(9)式，可以继续分解为

$$\oint(a_1b_2)dx\wedge dy=\iint\left(\frac{\partial(a_1b_2)}{\partial w}\cos\gamma-\frac{\partial(a_1b_2)}{\partial z}\cos\theta\right)dV \tag{10}$$

$$\oint(a_2b_1)dx\wedge dy=\iint\left(\frac{\partial(a_2b_1)}{\partial w}\cos\gamma-\frac{\partial(a_2b_1)}{\partial z}\cos\theta\right)dV \tag{11}$$

只需证明(10)式，(11)式同理可得。因为$\cos\gamma=\dfrac{\frac{\partial(x,y,w)}{\partial(u,v,t)}}{\left|\overline{\frac{\partial\vec{R}}{\partial u}\frac{\partial\vec{R}}{\partial v}\frac{\partial\vec{R}}{\partial t}}\right|}$ $\cos\theta=-\dfrac{\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,t)}}{\left|\overline{\frac{\partial\vec{R}}{\partial u}\frac{\partial\vec{R}}{\partial v}\frac{\partial\vec{R}}{\partial t}}\right|}$，

$dV=\left|\overline{\frac{\partial\vec{R}}{\partial u}\frac{\partial\vec{R}}{\partial v}\frac{\partial\vec{R}}{\partial t}}\right|dudvdt$，代入(10)式等号右边，有

$$\iint\left(\frac{\partial(a_1b_2)}{\partial w}\cos\gamma-\frac{\partial(a_1b_2)}{\partial z}\cos\theta\right)dV$$

$$=\iint\left[\frac{\partial(a_1b_2)}{\partial w}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right]dudvdt$$

$$-\iint\left[\frac{\partial(a_1b_2)}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right]dudvdt$$

$$=\iint\left[\begin{array}{l}\frac{\partial(a_1b_2)}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial(a_1b_2)}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial(a_1b_2)}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}\\-\frac{\partial(a_1b_2)}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial(a_1b_2)}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial(a_1b_2)}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\end{array}\right]dudvdt$$

$$=\iint\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial\left[\left(-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}\right)(a_1b_2)\right]}{\partial v}+\frac{\partial\left[\left(-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)(a_1b_2)\right]}{\partial u}\\+\frac{\partial\left[\left(-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)(a_1b_2)\right]}{\partial t}\end{array}\right\}dudvdt$$

$$=\oint\left\{\begin{array}{l}\left[\left(-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}\right)(a_1b_2)\right]dt\wedge du+\left[\left(-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)(a_1b_2)\right]dv\wedge du\\+\left[\left(-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)(a_1b_2)\right]dv\wedge dt\end{array}\right\}dudvdt$$

最后一步利用了三维空间的 Gauss 公式。而对于(10)式的左边，因为

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv+\frac{\partial x}{\partial t}dt$$

$$dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv+\frac{\partial y}{\partial t}dt$$

所以

$$\oint(a_1b_2)dx\wedge dy$$

$$=\oint(a_1b_2)\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv+\frac{\partial x}{\partial t}dt\right)\wedge\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right)$$

$$=\oint\left\{\begin{array}{l}\left[\left(-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}\right)(a_1b_2)\right]dt\wedge du+\left[\left(-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)(a_1b_2)\right]dv\wedge du\\+\left[\left(-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)(a_1b_2)\right]dv\wedge dt\end{array}\right\}dudvdt$$

可见，(10)式的等号左边等于右边，此公式得证。

（其实，也可以用一个简单的例子来探测一下这个公式的正确性，对于一个最简单的矢量场 $\vec{A}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，带入三维空间的 Stokes 公式，左边有

$$\oint\underline{\overline{A}}\cdot\underline{\overline{dl}}=\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}=\oint xdx+ydy+zdz=\oint\frac{1}{2}d\left(x^2+y^2+z^2\right)=0$$

右边有

$$\iint\underline{\overline{\nabla A}}\cdot d\vec{S}=\int\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\x&y&z\end{vmatrix}d\vec{S}=0$$

左边=右边=0；在四维空间中，令 $\vec{A}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}+w\vec{l}$，$\vec{B}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}+w\vec{l}$，代入四维空间 Stokes 公式，左边有

$$\oint\underline{\overline{AB}}\cdot d\vec{S}$$

$$=\oint\begin{vmatrix}y&z\\y&z\end{vmatrix}dy\wedge dz+\begin{vmatrix}x&y\\x&y\end{vmatrix}dx\wedge dy+\begin{vmatrix}x&z\\x&z\end{vmatrix}dx\wedge dz+\begin{vmatrix}x&w\\x&w\end{vmatrix}dx\wedge dw+\begin{vmatrix}y&w\\y&w\end{vmatrix}dy\wedge dw+\begin{vmatrix}z&w\\z&w\end{vmatrix}dz\wedge dw=0$$

右边有

$$\iint\underline{\overline{\nabla AB}}d\vec{V}=\iint\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}&\vec{l}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}&\frac{\partial}{\partial w}\\x&y&z&w\\x&y&z&w\end{vmatrix}d\vec{V}=0$$

左边=右边=0。）

空间维度大于等于4时的Stokes公式包含了两个或两个以上的矢量场，与三维空间的情况相对应，称之为**耦合场的Stokes公式**。

讨论至此，有人可能会质疑，高维的矢量分析与场论公式对于我们这些生活在三维空间中的生物来说有什么意义？前苏联著名的航天先驱齐奥尔科夫斯基说过："地球是人类的摇篮，但人类不会永远生活在摇篮里。"而我要说："三维空间是人类的摇篮，而人类的眼光不可能永远局限在狭小的三维空间中，如果考虑一些物理学定律在n维空间中的情况，我们可能对一些现象有更深刻的认识。"

参考文献：

[1]E.C.Young著，黄祖良、陈强顺译，矢量分析与张量分析[M]，上海：同济大学出版社，1989

[2]闫萍，牛琦，高维高斯公式[J]，常熟理工学院学报（自然科学），第22 卷第10 期