离散数学教程
（集合论与图论）

离散数学：计算机科学与技术的数学基础课

内容：集合论，图论，组合数学，代数结构，数理逻辑

集合论:（第1-4章）

组合数学初步:（第5-7章）

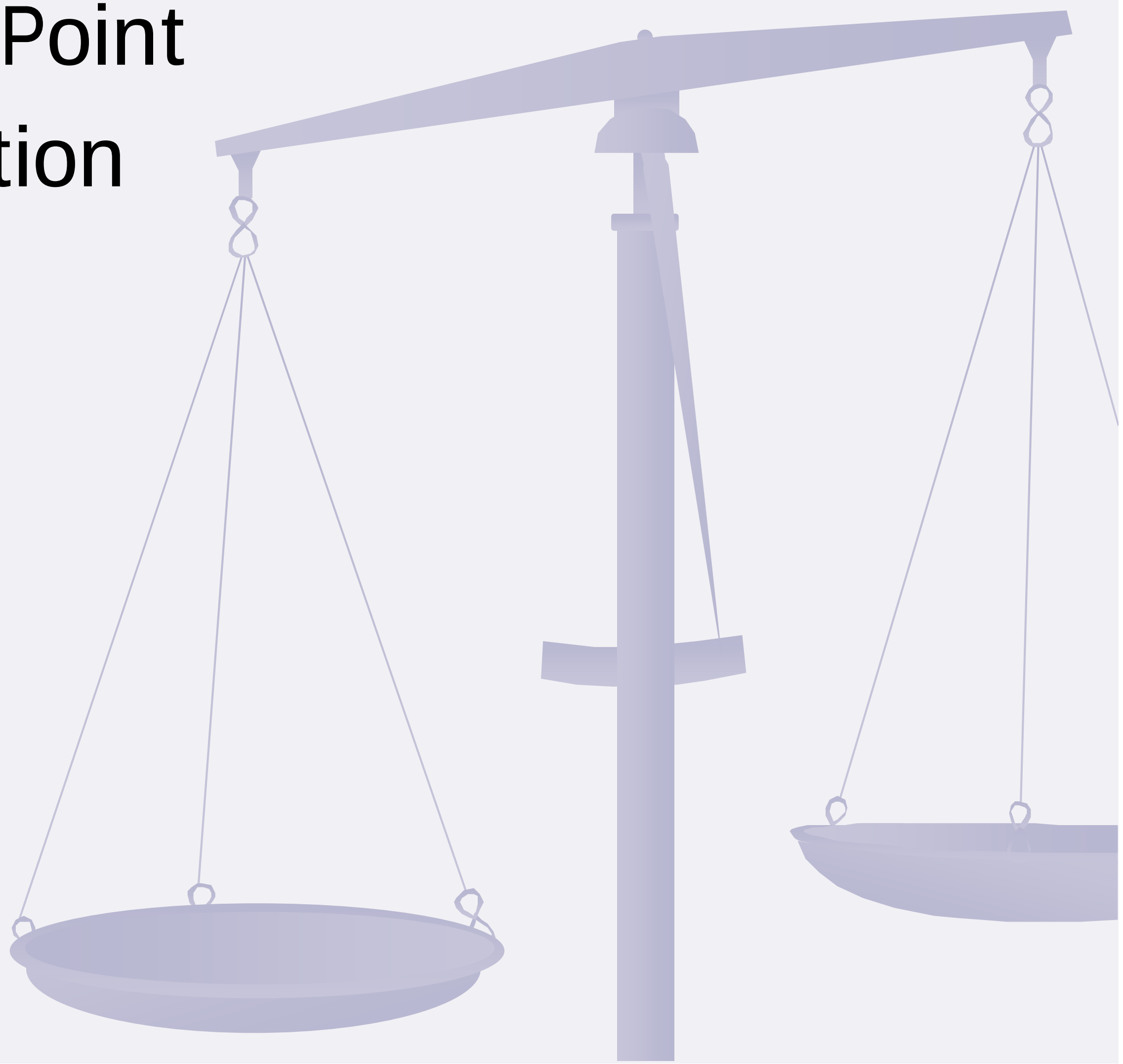
图论:（第8-11章）

教师介绍

- 教师：吴永辉　博士　副教授
- 简历：
- 1984-1988　上海科技大学计算机系　本科
- 1988-1991　复旦大学计算机系　硕士
- 1991-2003　华东师范大学计算机系　工作
- 1998-2001　复旦大学计算机系　博士
- 2003-　复旦大学计算机系　工作
- 答疑E-mail: yhwu@fudan.edu.cn

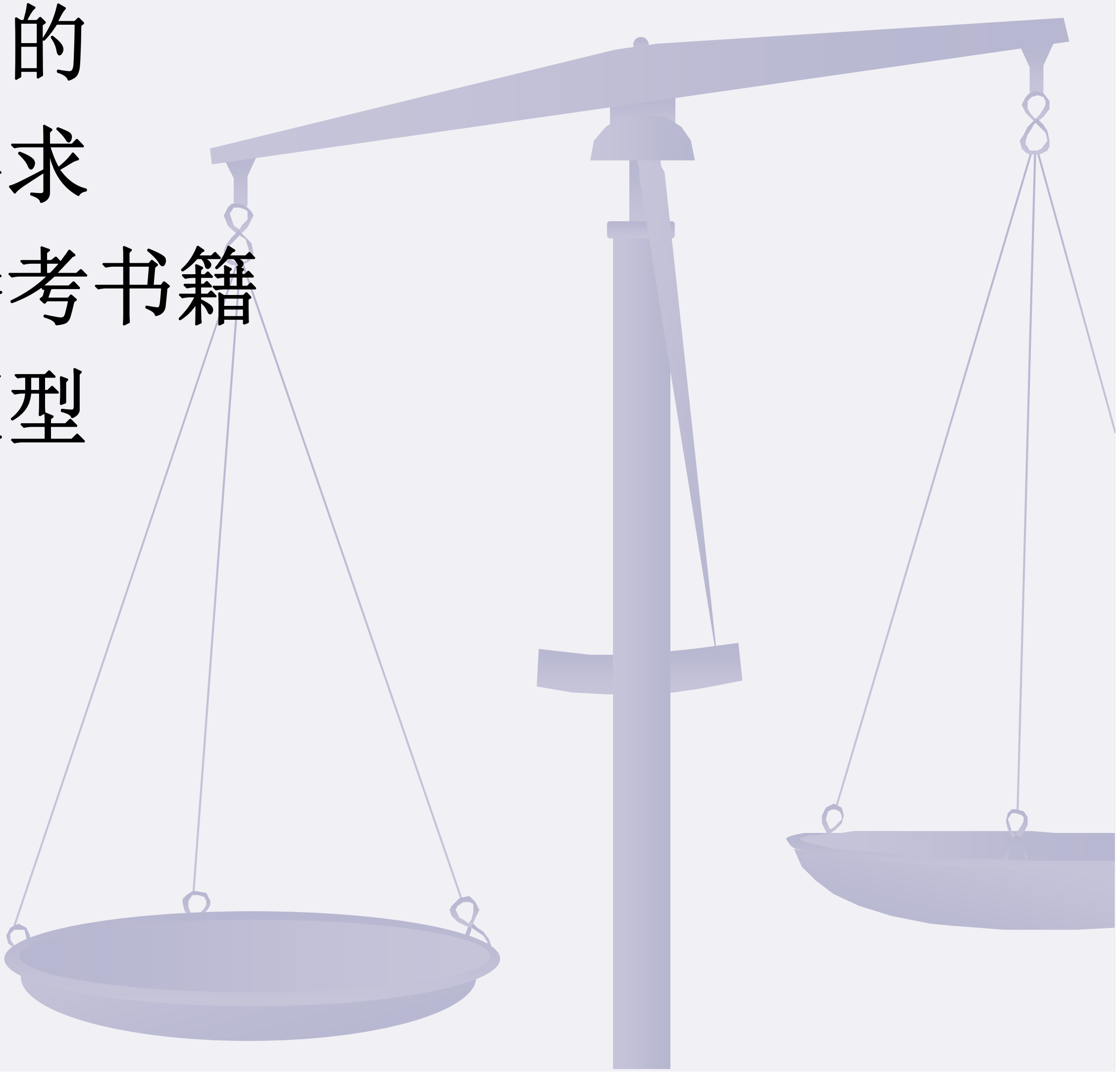
《集合论与图论》课件制作软件

- Microsoft PowerPoint
- MathType Equation



《集合论与图论》课程大纲

- 课程性质与目的
- 教学内容与要求
- 使用教材、参考书籍
- 命题说明和题型



课程性质、目的与基本要求

- ***课程性质***

  本课程讲授计算机科学与技术的数学基础课《离散数学》的部分主要内容：集合论、图论与组合数学初步，是计算机专业的主干课程之一。

  本课程前行课程为线性代数，数学分析(上)。

- ***课程目的***

  使学生掌握集合论、图论与组合数学初步的基本内容，并对证明的思想和方法深入理解和体会，初步培养学生的思维过程的数学化。

- ***基本要求:***
- 掌握集合论、组合学和图论的基本概念，清楚了解引入基本概念的实际背景、各概念间相互关系；掌握基本定理以及有关理论题的证明技巧；掌握解决计数问题的基本方法和技巧；掌握图论中各算法设计的思想、正确性证明以及算法的应用。为进一步学习计算机其他课程打下坚实的基础。

教学方式

- 本课程以课堂讲授为主。

考核方式

- 平时作业；
- 集合论、组合数学和图论3次课堂练习；
- 期中，期末的两次笔试考试。

教学内容与要求----集合论

- 第一章　集合的基本概念

　　掌握：集合的基本概念，集合的运算。了解：集合论的悖论。掌握证明两个集合相等的基本法和公式法。

- 第二章　关系

　　掌握：关系的性质、运算和关系的闭包，以及等价关系和偏序关系。了解：关系在关系数据库中的应用。掌握证明的类型。

- 第三章　函数

　　掌握：函数的基本概念，复合函数和逆函数。了解：集合的特征函数。

- 第四章　无限集

　　掌握：基数及基数的比较，判断可列集与不可列集的方法。了解：集合的递归定义。

教学内容与要求----组合数学初步

- **第五章　　鸽笼原理**

　　掌握：利用鸽笼原理解决组合数学中一些存在性问题的技巧。

- **第六章　排列与组合**

　　掌握：集合的排列与组合，多重集的排列与组合等计数方法，有序划分和无序划分。

- **第七章　生成函数与递推关系**

　　掌握：用生成函数和递推关系解决组合计数问题的方法，以及求解递推关系的生成函数方法。
了解：求解递推关系的特征根方法。

教学内容与要求----图论

- 第八章　图的基本概念

　　掌握：图的基本术语，路、回路和连通的基本概念，求最短路的算法及算法正确性证明，欧拉图和哈密顿图的基本概念、判别方法以及有关定理。

- 第九章　平面图与图的着色

　　掌握：平面图的基本概念、平面图的特征和欧拉公式，掌握图的点着色和平面图的面着色概念。了解：图的边着色概念。

- 第十章　树

　　掌握：树的基本性质和生成树、割集、有根树的概念，求最小生成树和最优树 的算法及算法的正确性证明。了解：树的计数问题。

教学内容与要求----图论

- 第十一章　连通度、网络与匹配

　　教学时间：10学时；掌握：点连通度和边连通度的基本概念，掌握最大网络流算法及算法正确性证明，掌握匹配的基本概念和判别方法，掌握独立集和覆盖的基本概念和有关定理及证明方法。了解：佩特里网及其图的表示。

使用教材

- 《离散数学》，赵一鸣，阚海斌，吴永辉编著。人民邮电出版社，2011。

参考书籍

- 一、基础

[1] Bernard Kolman, etc.. Discrete Mathematical Structure, Third Edition. 1997. 清华大学出版社, Prentice Hall. (中、英文版)

[2] 左孝凌, 李为槛, 刘永才. 离散数学 理论 分析 题解。1988，上海科技文献出版社。

[3] 左孝凌, 李为槛, 刘永才. 离散数学。 1988，上海科技文献出版社。

- 二、提高

[4] Kenneth H. Rosen. Discrete Mathematics and its Applications. (4th, 5th Edition). 机械工业出版社, McGraw-Hill. (中、英文版)

[5] 吴永辉，王建德。数据结构编程实验：大学程序设计课程与竞赛训练教材（附光盘）。机械工业出版社。2012。

参考课件

- [1] 《Discrete Mathematics and Its Applications》课件

在线学习网站

- [1]北京大学计算机系《离散数学教程》网上教室

http://necweb.neu.edu.cn/ncourse/lssx/index.htm

- [2]北京邮电大学《离散数学》在线课件

http://www.pris.edu.cn/lesson/dis-math/Content.htm

- [3]国立交通大学《离散数学——电脑辅助教学CAI》（台湾）

http://www.cis.nctu.edu.tw/~is83039/discret/discrete.html

在线计算机和数学类书库

- 计算机和数学类书库

http://www.infoxa.com/asp/book/cx.asp

- 吉林大学的“藏经阁”**elmo站:**

http://elmo.jlu.edu.cn/

理论计算机科学经典网站

- 国内：
- http://algorithm.lzu.edu.cn
- 国际：
- http://robotics.stanford.edu/~suresh/theory/theory-home.html

命题说明和题型

- 1 填空题：基本概念的理解和掌握
- 2 判断题：概念的掌握与应用
- 3 计算、证明题：概念的综合应用，数学方法的运用

集合论

- 集合论是现代数学的基础,它已深入到各种科学和技术领域中,被广泛应用到数学和计算机科学的各分支中去。
- 集合论的创始人：康托尔(Cantor,1845--1918)，1874年，“关于所有实代数数所成集合的一个性质”的论文。
- 理论中出现了悖论。为解决悖论，在20世纪初开始了集合论公理学方向的研究,它是数理逻辑的中心问题之一。（本书避免用集合的公理化方法，直观地介绍朴素集合论。）

集合论部分提高参考书籍

- 沈恩绍　集论与逻辑----面向计算机科学 科学出版社
- 集合论部分内容与常规教材相似，强调公理化

图论

- 图论提供了一个自然的结构，由此产生的数学模型几乎适合于所有科学（自然科学与社会科学）领域，只要这个领域研究的主题是“对象”与“对象”之间的关系。

图论部分提高参考书籍

- Bela Bollobas. Modern Graph Theory (现代图论). 科学出版社 & Springer. 2001.

组合数学

- 1666年莱布尼兹所著《组合学论文》一书问世，这是组合数学的第一部专著。书中首次使用了组合论（Combinatorics）一词。
- 组合数学的蓬勃发展则是在计算机问世和普遍应用之后。由于组合数学涉及面广，内容庞杂，并且仍在很快地发展着，因而还没有一个统一而有效的理论体系。这与数学分析形成了对照。

组合数学部分提高参考书籍

- Richard A.Brualdi. Introductory Combinatorics (3E)，(组合数学(第3版), (冯舜玺等译)), 机械工业出版社, 2002.

第一章 集合的基本概念

1.1 集合的表示
1.2 集合的子集
1.3 笛卡尔积
1.4 集合的运算
1.5 罗素悖论

引言：什么是集合？

- 一些自行车
- 在计算机系车棚内的自行车

- 一些自行车

  不是集合，无法确定范围和性质

- 在计算机系车棚内的自行车

  是集合，可以确定范围和性质

1.1 集合的表示

一　集合的定义

- <1> 集合：具有共同性质的一些东西汇集成一个整体。例：复旦大学教师
- <2> 元素：构成一个集合中的那些对象。

  a∈A　a是A的元素，a属于A

  a∉A　a不是A的元素，a不属于A
- 例：吴永辉∈复旦大学教师，沈恩绍∉复旦大学教师

常用大写字母表示集合，小写字母或数字表示元素

1.1 集合的表示

- 二 集合的表示
- <1> 列出集合中的元素：A={1,3,5,7,9}
- <2> 描述集合中元素具有的共同性质

  { x | p(x) }：$A=\{x \mid x^2-1=0\}$
- <3> 通过某规则的计算来定义集合中的元素

1.1 集合的表示

- 三　术语
- <1>　空集：不含任何元素的集合，记为∅
- <2>　有/无限集：集合中有有限个元素/否则.....

有限集A的元素个数称为集合A的基数，记为|A|。

集合中元素之间的次序是无关紧要的。

- <3>　多重集：集合中元素可以重复出现
- <4>　集合族：以集合为元素组成的集合
- <5>　∅与{∅}是不同的：{∅}表示以∅为元素的集合。

- 例：设A, B, C是任意3个集合，如果$A\in B, B\in C$, 则$A\in C$可能吗？ $A\in C$常真吗？举例说明。

- /*集合论题集，经典习题，集合基础*/

1.2 集合的子集

- 一　文氏图：用平面上封闭曲线包围点集的图形来表示集合
- 图1.1, 图1. 2

- 二　定义1.1（子集）

　　集合A, B，A的每一元素都是B的元素，则A是B的子集。$A \subseteq B$或$B \supseteq A$。

- 特别：$A \subseteq A$。

- 此外，若存在元素$a \in A$, 但$a \notin B$, 则A不是B的子集.

- 三　定义1.2（集合相等与不相等）：集合A和B的元素全相同，则称A和B相等，A=B；否则称A和B不相等，A≠B。

- *定理1.1*

  A=B⇔A⊆B并且B⊆A。

1.2 集合的子集——证明的方法

- 定理1.1： **$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B$并且$B \subseteq A$。**

- “当且仅当”：证明由两部分组成：
- 1）由条件证明结论

$A=B \Rightarrow A \subseteq B$并且$B \subseteq A$

- 2）由结论证明条件

$A \subseteq B$并且$B \subseteq A \Rightarrow A=B$

- 证明：
- $A=B \Rightarrow A \subseteq B$并且$B \subseteq A$。因为$A=B$，由定义$A$中的每个元素是在$B$中，所以$A \subseteq B$，同理$B$中的每个元素是在$A$中，所以$B \subseteq A$。
- $A \subseteq B$并且$B \subseteq A \Rightarrow A=B$。反证，如果$A \neq B$，则$A$中至少有一个元素不在$B$中，与$A \subseteq B$矛盾；或者$B$中至少有一个元素不在$A$中，与$B \subseteq A$矛盾。所以$A \neq B$不可能成立。所以$A=B$。

- 四 定义1.3（真子集）：$A\subseteq B$并且$A\neq B$，则$A\subset B$。
- （$\in$和$\subset$不同：元素 $\in$集合；集合$\subset$集合）

- 例：设A, B, C是集合，判断下列命题真假，如果为真，给出证明；如果为假，给出反例：
- 1) $A \notin B,\ B \in C \Rightarrow A \in C;$
- 2) $A \notin B,\ B \notin C \Rightarrow A \notin C;$
- 3) $A \in B,\ B \notin C \Rightarrow A \notin C;$
- 4) $A \subset B,\ B \notin C \Rightarrow A \notin C;$
- 5) $a \in A,\ A \subset B \Rightarrow a \in B.$

- /*集合论题集，经典习题，集合基础*/

- 五 定义1.4（全集）：在取定一个集合U以后，对于U的任何子集而言，称U为全集。

定理1.2:

（1） $\emptyset \subseteq A$

(2) $A \subseteq A$

(3) $A \subseteq U$

1.2 集合的子集——证明的方法

- 证明：（**1**）**$\varnothing \subseteq A$** **(2)** **$A \subseteq A$** **(3)** **$A \subseteq U$**
- （1）反证法：假设结论不成立，导出矛盾结果。

$\varnothing$不是A的子集，导致矛盾

- （2，3）基本法：由子集定义

$x \in$左$\Rightarrow x \in$右，则左$\subseteq$右

- 证明：（**1**）$\varnothing \subseteq$**A**
- 假设$\varnothing$不是**A**的子集，则至少有一个元素**x**，使得**x**$\in \varnothing$且**x**$\notin$**A**。又因为$\varnothing$是空集，它没有元素，所以对任何**x**，必有**x**$\notin \varnothing$，导致矛盾。因此$\varnothing$是集合**A**的子集。

反证法的证明步骤

（1）假设命题的结论不成立；

（2）进行一系列的推理；

（3）推理过程中出现下列情况中的一种：

1）与已知条件矛盾；

2）与公理矛盾；

3）与已知定理矛盾；

（4）由于上述矛盾的出现，可以断言，原来的假定“结论不成立”是错误的

（5）肯定原来命题是正确的。

反证法的思想 / 思维过程

“结论不成立”与“结论成立”必有一个正确。

“结论不成立”会导致出现错误，推理过程、已知条件、公理和已知定理没有错误，惟一有错误的是一开始接假定的“结论不成立”，所以“结论不可能不成立”，即“结论成立”。

1.2 集合的子集

- 六　定义1.5（幂集）：
- A的所有子集组成的集合称为A的幂集。记为P(A)。
- 例 1.1（已知A，求幂集）
- 定理　1.3　$|P(A)|=2^{|A|}$
- 证明方法：组合的方法

求幂集 —— 代数法

- P13 习题1.13 设$A=\{a, \{a\}\}$，问：

(1) $\{a\}\in P(A)$? $\{a\}\subseteq P(A)$?

(2) $\{\{a\}\}\in P(A)$? $\{\{a\}\}\subseteq P(A)$?

(3) 又设$A=\{a, \{b\}\}$，重复(1)、(2)。

- 解: (1, 2)首先求$P(A)$，代数法：

代入：设$x=\{a\}$，则$A=\{a, x\}$；

$P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{x\}, \{a, x\}\}$；

回代： $P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$

$P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$

(1) $\{a\}\in P(A)$ $\{a\}\nsubseteq P(A)$

(2) $\{\{a\}\}\in P(A)$ $\{\{a\}\}\subseteq P(A)$

(3) 同理，用代入法，设$x=\{b\}$，则$A=\{a, x\}$；

回代： $P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{\{b\}\}, \{a, \{b\}\}\}$，则$\{a\}\in P(A)$，$\{a\}\nsubseteq P(A)$，$\{\{a\}\}\notin P(A)$，$\{\{a\}\}\subseteq P(A)$

1.3 笛卡尔积

- 一　定义1.6（有序对）
- 两个对象按一定次序组成一对，称为有序对(a, b)。
- （a, b)=(c, d) $\Leftrightarrow$ a=c和b=d。

二　定义1.7（有序n元组）

- n个对象的序列a_1, a_2, ……,a_n组成一组称为有序n元组，记为(a_1, a_2, ……,a_n)，其中a_i称为第i个分量。
- 两个有序n元组相等⇔每个对应分量相等。

1.3 笛卡尔积

- 三定义1.8（直积）

　　两个集合A和B，定义A和B的笛卡尔积为$A\times B=\{(a, b) \mid a\in A, b\in B\}$，又称$A\times B$为A和B的直积。

1.3 笛卡尔积

- 四 定义1.9（笛卡尔积）

  n个集合$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$，$A_1\times A_2\times\ldots\ldots\times A_n=\{(a_1, a_2, \ldots\ldots,a_n) \mid a_i\in A_i, i=1,\ldots\ldots, n\}$。

若对所有i，$A_i=A$，则$A_1\times A_2\times\ldots\ldots\times A_n$记为$A^n$。

1.4 集合的运算

- 一　定义1.10 (并，交，差，补，对称差)
- (1)　$A \cup B=\{x \mid x \in A$或$x \in B\}$
- (2)　$A \cap B=\{x \mid x \in A$且$x \in B\}$
- (3)　$A-B=\{x \mid x \in A$且$x \notin B\}$
- (4)　$\tilde{A}=U-A$
- (5)　$A \oplus B=(A-B) \cup (B-A)$

- 例　集合运算：A={1,2,3,4,5},

  B={1,2,4,6},

  C={7,8},

  U={1,2,3,4,5,6, 7,8,9,10}
- $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$,
- $A \cap B=\{1,2,4\}$,
- $A \cap C=\varnothing$,
- $A-B=\{3,5\}$,
- $A-C=A$

$$\overline{A} = \{6,7,8,9,10\}, \quad \overline{B} = \{3,5,7,8,9,10\}$$

1.4 集合的运算

- 证明两个集合相等，可用如下办法：
- <1>基本法　集合相等的充要条件是两个集合互为子集；即，左式$\subseteq$右式，右式$\subseteq$左式。所以证明：x$\in$左式$\Rightarrow$x$\in$右式；x$\in$右式$\Rightarrow$x$\in$左式。
- 经典实例：例1.4，例1.5，例1.6证明
- 理论基础：定理1.1和定义1.1, 1.2
- <2>公式法　由集合运算的基本性质，通过推演，进行证明。
- 经典实例：例1.7，例1.8　证明
- 理论基础：定理1.4和定义1.10

基本法

- 例1.4 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

证明：

1）$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$

任一$x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

2）$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$

任一$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)$

基本法

- 例1.5　若$A\subseteq B$, 则$(A\cap B)=A$, $A\cup B=B$.

证明：

1）证$(A\cap B)=A$思想：

$(A\cap B)\subseteq A$；　$A\subseteq(A\cap B)$

2）证$A\cup B=B$思想：

$A\cup B\subseteq B$; $B\subseteq A\cup B$

- 例1.6证明:

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

首先证明 $:\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

有$x \notin A \bigcap B$, 对$\forall x \in \overline{A \bigcap B}$, 故$x \notin A$或$x \notin B$,

即$x \in \overline{A}$或$x \in \overline{B}$, 因此有$x \in \overline{A} \bigcup \overline{B}$

因此有$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \bigcup \overline{B}$

然后证明$:\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$

有$x \in \overline{A}$或$x \in \overline{B}$, 对$\forall x \in \overline{A} \bigcup \overline{B}$, 故$x \notin A$或$x \notin B$,

即$x \notin A \bigcap B$ 因此有$x \in \overline{A \bigcap B}$, 所以$\overline{A} \bigcup \overline{B} \subseteq \overline{A \bigcap B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

1.4 集合的运算

- 三 定理1.4 (集合运算的基本性质)
- (1) 幂等律 $A\cup A=A$ $A\cap A=A$
- (2) 交换律 $A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$
- (3) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

- (4) 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
  $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

1.4 集合的运算

- (5) 恒等律 $A \cup U = U$ $A \cap U = A$
  $A \cup \varnothing = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
- (6) 取补律

$$\overline{\varnothing} = U$$

$$\overline{U} = \varnothing$$

$$A \cup \overline{A} = U$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

1.4 集合的运算

- (7) 双重补

$$\overline{\overline{A}} = A$$

1.4 集合的运算

- (8) 狄•摩根律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- 证明类似于例1.4，例1.5，例1.6证明

- 判断题，为真给出证明，为假给出反例：
- 若$A\times B=A\times C$，则$B=C$。

- */*北京大学1994考研*/*

- 解：错误。
- 如果A为空集，则有$A \times B = A \times C$，即使$B \neq C$，原式成立。

公式法

- 原则：

1）根据集合运算的定义，将集合运算表达式中-和⊕转换为∪和∩；

$$A - B = A \cap \overline{B};$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

2）将补运算作用到单一集合上；

3）左式⇒右式；右式⇒左式；左式⇒中间式，右式⇒中间式；

4）根据定义1.10和定理1.4转换

- 例：(A∪B)-C=(A-C)∪(B-C)

证明: 左$=(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap\overline{C}$

$=(A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C})$)(分配律)

$=(A-C)\cup(B-C)$

- 例1.7 证明$(A\cap B)-(A\cap C)=A\cap(B-C)$
- 证明思想：将集合运算表达式中-转换

- 例1.8 证明$A \oplus B=(A \cup B)-(A \cap B)$
- 证明思想：将集合运算表达式中-和$\oplus$转换

- $P(\varnothing \cup \{\varnothing\})=$____________________________.

- */*北京理工大学1999考研*/*

- 判断题，为真给出证明，为假给出反例：
- （1）$\{\varnothing\} \subseteq \{x\} - \{\{x\}\}$
- （2）$(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$

- */*(1)北京大学1994考研, (2)上海交通大学2001考研*/*

- 解：错误。
- $\{x\}-\{\{x\}\}=\{x\}$
- 显然，$\{\varnothing\}\subseteq\{x\}$不成立。

幂集证明——基本法、幂集的定义

- 证明：$P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$，并说明等号成立的条件。

- */*上海交通大学1999考研*/*

- 判断下式是否成立，如果成立，则证明；否则举出反例。
- $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$
- */*上海交通大学2001考研*/*

1.4 集合的运算

- 四 定义1.11 (多个集合的并和交)

  设集合A_1, ……, A_n，定义：

$A_1 \cup …… \cup A_n = \{ x \mid$ 至少有某个i，$1 \le i \le n$，$x \in A_i \}$，称为A_1, ……, A_n的并；

$A_1 \cap …… \cap A_n = \{ x \mid x \in A_i$，对一切$i=1,…,n$成立$\}$，称为$A_1$, ……, A_n的交。

1.4 集合的运算

五、多个集合的运算，除对并（交）的结合律、交换律成立以外，还有

(1) 分配律

$B\cap(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup\ldots(B\cap A_n)$

$B\cup(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=(B\cup A_1)\cap(B\cup A_2)\cap\ldots\cap(B\cup A_n)$

(2) 狄•摩根律

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

1.4 集合的运算

- 六、广义并、广义交
- 1. 定义（广义并）
- 设Ǽ为一个集合族，称由Ǽ中全体元素的元素组成的集合成为的Ǽ广义并集，记作∪Ǽ，称∪为广义并运算符，读作“大并”。

∪Ǽ={x|∃z (z∈Ǽ 并且x∈z)}

例：Ǽ={{a, b}, {c, d}, {d, e, f}}

∪Ǽ={a, b, c, d, e, f}.

1.4 集合的运算

- 2. 定义（广义交）
- 设Æ为一个非空集合族，称由Æ中全体元素的公共元素组成的集合成为的Æ广义交集，记作∩Æ，称∩为广义交运算符，读作“大交”。

$$\cap Æ=\{x|\forall z\ (如果z\in Æ，则x\in z)\}$$

例：设Æ={{1, 2, 3}, {1, a, b}, {1, 6, 7}}

∩Æ={1}

- 3. 在广义并与广义交的运算中，集合族中的元素仍看成集合族。
- 例，给出下列集合族：
- $Ǽ_1=\{a, b, \{c, d\}\}$, $Ǽ_2=\{\{a, b\}\}$, $Ǽ_3=\{a\}$, $Ǽ_4=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $Ǽ_5=a\ (a\neq\varnothing)$, $Ǽ_6=\varnothing$
- $\cup Ǽ_1=a\cup b\cup\{c, d\}$, $\cap Ǽ_1=a\cap b\cap\{c, d\}$,
- $\cup Ǽ_2=\{a, b\}$, $\cap Ǽ_2=\{a, b\}$,
- $\cup Ǽ_3=a$, $\cap Ǽ_3=a$,
- $\cup Ǽ_4=\{\varnothing\}$, $\cap Ǽ_4=\varnothing$,
- $\cup Ǽ_5=\cup a$, $\cap Ǽ_5=\cap a$,
- $\cup Ǽ_6=\varnothing$, $\cap Ǽ_6$无意义.

- 设$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$为集合族, 试证明:
- (1)若$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$, 则$\cup\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{B}$;
- (2)若$A\in\mathcal{B}$, 则$A \subseteq \cup\mathcal{B}$;
- (3)若$\mathcal{A}\neq\varnothing$, 且$\mathcal{A} \subseteq\mathcal{B}$, 则$\cap\mathcal{B}\subseteq\cap\mathcal{A}$;
- (4)若$A\in\mathcal{B}$, 则$\cap\mathcal{B}\subseteq A$;
- (5)若$\mathcal{A}\neq\varnothing$, 则$\cap\mathcal{A}\subseteq\cup\mathcal{A}$.

- 证明:
- (1)对于任意的x, $x\in\cup\mathbb{A}$, 则存在A, $A\in\mathbb{A}$并且$x\in A$, 所以$A\in\mathbb{B}$, 则$x\in\cup\mathbb{B}$.
- 所以$\cup\mathbb{A}\subseteq\cup\mathbb{B}$.
- */*证明方法:基本法*/*

- (2)因为$\mathbb{A}\in\mathbb{B}$, 由广义并集定义, $\mathbb{A}\subseteq\cup\mathbb{B}$.

- (3)由于$\mathbb{A}\neq\varnothing$, 所以$\mathbb{B}\neq\varnothing$, 故$\cap\mathbb{A}$与$\cap\mathbb{B}$均有意义. 对于任意的$x$, $x\in\cap\mathbb{B}$当且仅当对于任意的y, 如果$y\in\mathbb{B}$, 则$x\in y$. 所以, 如果$y\in\mathbb{A}$, 则$x\in y$. 所以$x\in\cap\mathbb{A}$.
- 所以$\cap\mathbb{B}\subseteq\cap\mathbb{A}$.

- (4), (5)的证明比较简单,请自行完成.

1.5 罗素悖论

- 命题：能区别真假的陈述语句。
- 例：我是学生。

  今天不下雨。
- 上述两个都是命题。因为它们都能判别真假。
- 例：祝你一帆风顺！

  你明天下午出去吗？
- 上述两个都不是命题。

1.5 罗素悖论

- 一　悖论

　一个命题Q，如果从Q为真，可以推导出Q为假；又从Q为非真推导出Q为真，命题Q是一个悖论。

- 二　说谎悖论和理发师悖论
- 1，说谎悖论

  我正在说谎

我们要问: 这个人是在说谎还是在讲真话?

- 如果他在说谎，这表明他的断言“我正在说谎”是谎话,也就是说他在讲真话。
- ***即他说谎，推出他是讲真话(即没有说谎)。***
- 另一方面，如果他讲真话，这表明他的断言“我正在说谎”是真话，也就是说他正说谎话，
- ***即他讲真话，推出他在说谎(即没有讲真话)。***
- 通过以上分析让我们看到，以命题出现的断言“我正在说谎”就是一个悖论,因为我们无法断言它的真伪。

- 2理发师悖论
- 一个村上，有一个理发师宣布他给而且只给所有自己不替自己理发的人理发。
- 现在要问：谁给这个理发师理发?

- 如果理发师的头由别人给他理，也就是说理发师自己不替自己理发，那么按照规定，这位理发师应该给自己理发。
- 另一方面，如果理发师的头由自己理,那么按照规定，理发师不能给自己理发。
- ***因此上述也是一个悖论：理发师的头由别人来理，不行；理发师的头由自己理，也不行。***

- 理发师悖论的数学化表示：

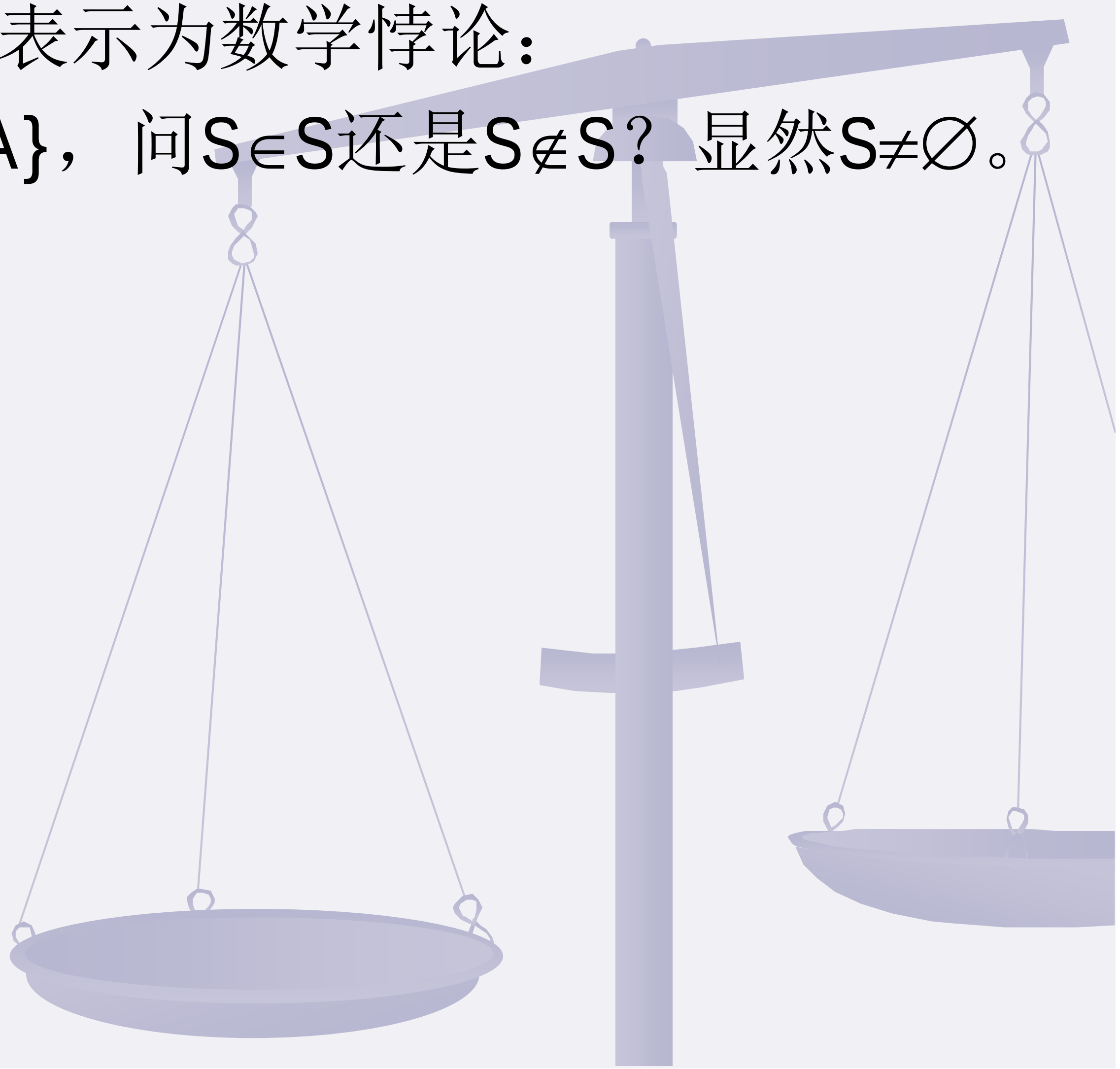
设S={自己给自己理发的人}

若理发师$\in$S，即理发师是自己给自己理发的人，但由理发师所宣布的，他不该给自己理发，则理发师$\notin$S；

若理发师$\notin$S，即理发师不是自己给自己理发的人，但由理发师所宣布的，他应该给自己理发，则理发师$\in$S；

罗素将理发师悖论表示为数学悖论

- 罗素将理发师悖论表示为数学悖论：
- 设$S=\{$集合$A \mid A \notin A\}$，问$S \in S$还是$S \notin S$？显然$S \neq \varnothing$。



- 3 悖论欣赏
- 古希腊哲学问题：鳄鱼两难
- 中国民间故事：师徒打官司
- 柏拉图与苏格拉底悖论

古希腊哲学问题：鳄鱼两难

一条鳄鱼从一位母亲手中抢走了一个小孩。

鳄鱼对孩子的母亲说：“请你回答，我会不会吃掉你的孩子，答对了，我就把孩子不加伤害地还给你；否则，就别怪我不客气了！”

孩子的母亲回答：“你是要吃掉我的孩子的。”

<u>鳄鱼是否将孩子还给母亲？</u>

中国民间故事：师徒打官司

一位律师收徒弟，协议规定：“学成之后，打赢一场官司交给律师一两银子，打输一场官司就不交。”

弟子满师后，打赢官司却一直不交钱给老律师，老律师告到县衙，和弟子打官司。

<u>这场官司该如何裁决？</u>

柏拉图与苏格拉底悖论

- 柏拉图说：“苏格拉底老师下面的话是假话。”
- 苏格拉底说：“柏拉图上面的话是对的。”

- *<u>柏拉图、苏格拉底二人的话是真话还是假话？</u>*

- 4 何谓集合？
- 1897年，康托尔：
- 一个集合就是指我们观察到的或者在我们思维中的一些确定的、不同事物的总体；这些事物称为该集合的元素。

- 1）某些集合是集合自身的元素

如：所有不是苹果的东西的集合

*/*它本身就不是苹果，它必须是此集合自身的元素*/*

- 2）问题：一个由一切不是集合本身的元素组成的集合，这个集合是它本身的元素吗？

1.5 罗素悖论

三　　罗素悖论

1）罗素将集合分成两类：

一类是集合A本身是A的一个元素，即$A \in A$；如上例；

另一类是集合A本身不是A的一个元素，即$A \notin A$；例如26个英语字母组成的集合A，由于A本身不是一个字母，所以$A \notin A$。

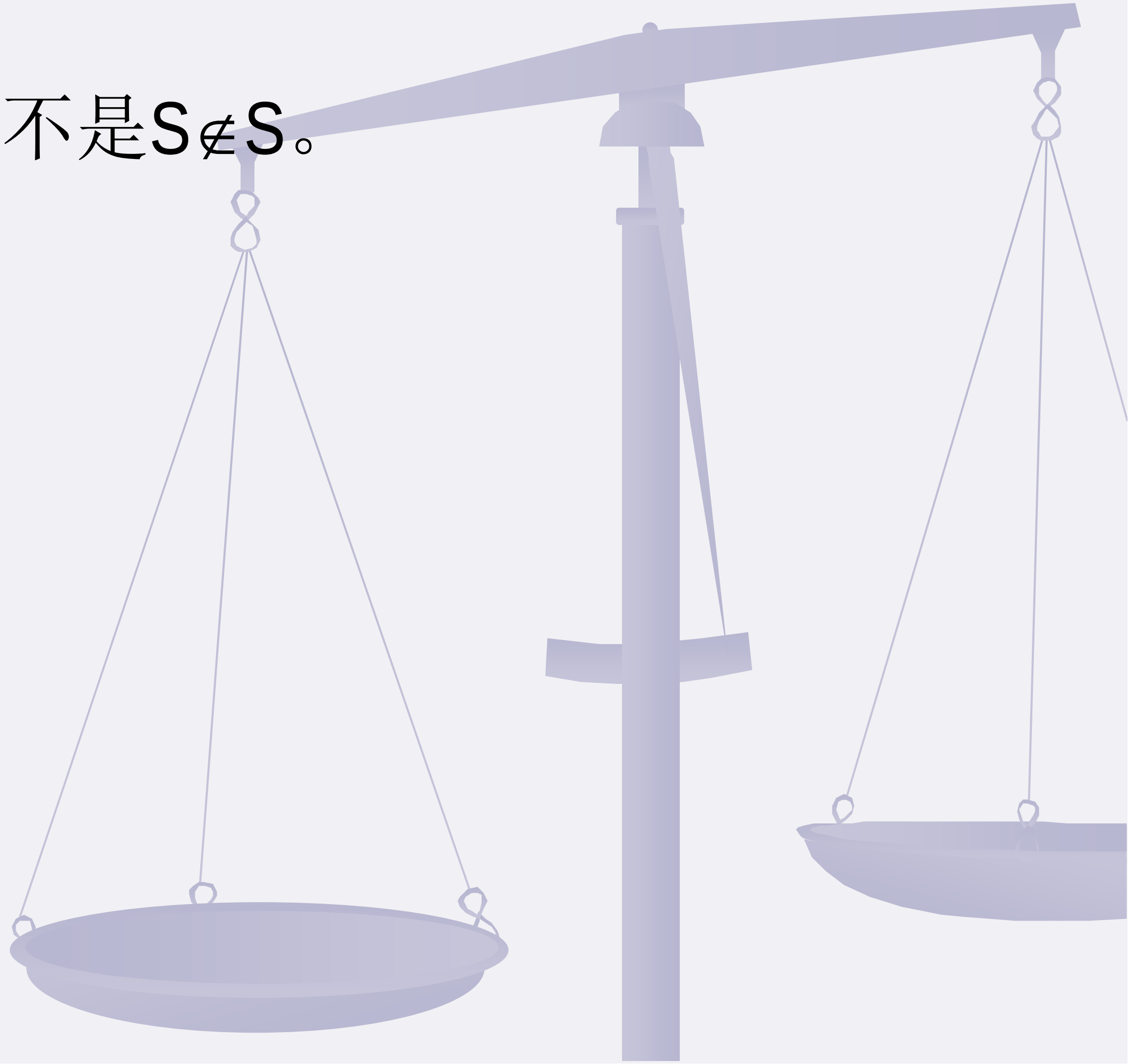
2）构造一个集合S：$S=\{A|A\notin A\}$，即，S是由满足条件$A\notin A$的那些A组成的一个新的集合。

问: S是不是它自己的一个元素? 即$S\in S$，还是$S\notin S$?

- 分析：
- 如果$S\notin S$, 因为集合S由所有满足条件$A\notin A$的集合组成, 由于$S\notin S$, 所以S满足对于集合S中元素的定义，即S是集合S的元素，也就是说 $S\in S$。
- 如果$S\in S$, 因为S中任一元素A都有$A\notin A$, 又由于$S\in S$,根据集合S的规定，知S不是集合S的元素, 也就是说$S\notin S$。

2）罗素悖论

既不是$S \in S$，也不是$S \notin S$。



- 罗素悖论的出现,说明朴素集合论有问题,从而使数学的基础发生了动摇（第3次数学危机），引起了一些著名数学家的极大重视。

- 在现代数学中为了防止这类悖论的出现, 产生各种公理化的集合论和不同的学派:
- 1）蔡梅罗(Zermelo) 创立集合论的一个公理系统；经过费兰克尔(A. Fraenkel)改进，形成著名的ZF系统；
- 2）罗素也发表了他的集合论公理系统——类型论；
- 3）以后，John von Nenmann, P. Bernays, Godel等相继建立了其他类型的公理系统；

- 沈恩绍　集论与逻辑　科学出版社

经典例题之一——集合运算

- 1.　　某学院学生选课情况如下：260人选艺术课，208人选生物课，160选计算机课，76人选艺术与生物课，48人选艺术与计算机课，62人选生物与计算机课，30人三门全选，150人三门都不选。问
- 1）共有多少名学生？
- 2）有多少学生选艺术与生物课，但不选计算机课？
- 3）有多少学生选艺术与计算机课，但不选生物课？

经典例题之一——集合运算

- 4）有多少学生选生物与计算机课，但不选艺术课？
- 5）有多少学生选艺术课，但不选生物或计算机课？
- 6）有多少学生选生物课，但不选艺术或计算机课？
- 7）有多少学生选计算机课，但不选艺术或生物课？

集合运算解题思想

- 容斥原理：
- 1）设A_1, A_2为有限集，则 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$。
- 2）设A_1, A_2,……,A_n为有限集，则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| +$$

$$\ldots\ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_n|$$

- 3）设U为全集，A_1, A_2,……,A_n为U的有限子集，则

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots\ldots \cap \overline{A_n}\right|$$

$$= |U| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n|$$

集合运算解题思想

- 容斥原理（包含排斥）应用
- 1）讨论的范围是什么？即那些是全集中的元素？----某学院的学生全体构成全集；
- 2）将全集中的元素进行分类----按学生选课的情况进行分类：选修艺术课为具有性质P_A，选修生物课为具有性质P_B，选修计算机课为具有性质P_C，具有上述性质的集合记为A, B, C；
- 3）列出计算公式；
- 4）用文氏图辅助运算。

求解----按题意给出已知条件

- 解：设A={选修艺术课学生}，B={选修生物课学生}，C={选修计算机课学生}。

则|A|=260, |B|=208, |C|=160, |A∩B|=76, |A∩C|=48, |B∩C|=62, |A∩B∩C|=30,

$$\left|\overline{A \cup B \cup C}\right| = 150$$

求解----a)学生总数

$$
\begin{aligned}
N &= \left|A \cup B \cup C\right| + \left|\overline{A \cup B \cup C}\right| \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\
&\quad + |A \cap B \cap C| + \left|\overline{A \cup B \cup C}\right|
\end{aligned}
$$

求解-----答案

- 答案
- a) 622
- b) 46
- c) 18
- d) 32
- e) 166
- f) 100
- g) 80

2.　　求1到250这250个整数中，至少能被2，3，5之一整除的数的个数。

解：设A, B, C表示1到250这250个整数中，能分别被2，3，5整除的数的集合。则有：

$|A|=125$, $|B|=83$, $|C|=50$

$|A\cap B|=41$, $|A\cap C|=25$, $|B\cap C|=16$, $|A\cap B\cap C|=8$,

那么，$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=184$

- 3. 75名儿童到游乐场去玩。他们可以骑旋转木马，坐滑行铁道，乘宇宙飞船。已知其中20人这3种东西都玩过，其中55人至少乘坐过其中的两种。若每样乘坐一次的费用是0.5元，游乐场总共收入70元，试用容斥原理确定，在75名儿童中有多少儿童没有乘坐其中任何一种。

经典例题之二——证明方法

- 反证法
- 引用已知的结论来简化证明步骤
- 证明两个集合相等常用的方法

证明方法1

- 1) 反证法。

设A为一个集合，B为A的补集合，则$A\cap B=\varnothing$。

证明：设$A\cap B\neq\varnothing$，则存在非空元素$x\in A\cap B$，故$x\in A$且$x\in B$，此与B为A的补集合矛盾。所以$A\cap B=\varnothing$。

证明方法2

- 2)引用已知的结论来简化证明步骤。
- 　　对任意的集合A，$\varnothing \subseteq$A。

证明：　反证法，假设存在一个集合A，使得$\varnothing \not\subseteq$A。即存在元素$x \in \varnothing$，但$x \notin$A。这与$\varnothing$是空集矛盾。

- 　　空集合是唯一的。
- 证明：设$\varnothing_1$和$\varnothing_2$都是空集合，由上题，$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$且$\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$，则$\varnothing_1 = \varnothing_2$。

证明方法3

- 3）证明两个集合相等常用的方法

基本法，公式法

- 习题1.3　基本法
- 习题1.11　公式法

证明方法练习

- 1）设A为一个集合，B为A的补集，则

$A \cap B = \varnothing$。

证明：反证法。设$A \cap B \neq \varnothing$，则存在$x \in A \cap B$，所以$x \in A$，并且 $x \in B$，矛盾。

证明方法练习

- 2）证明A∪B=B∪A。

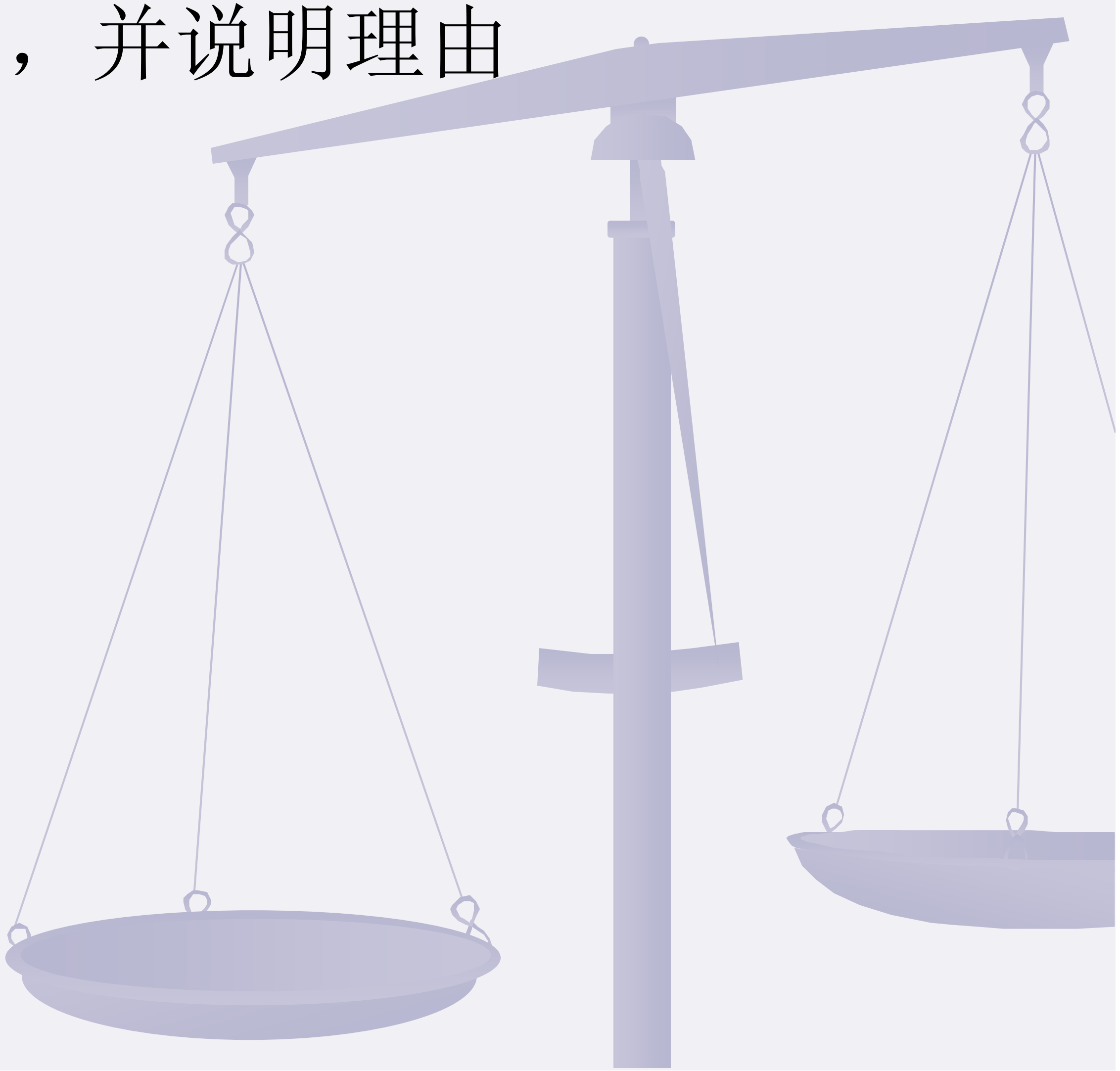
证明：分两部分证明。首先证明左式是右式的子集，然后证明右式是左式的子集。若两个集合互为子集时，必然相等。

- ①设任意$x\in A\cup B\Rightarrow x\in A$或者$x\in B\Rightarrow x\in B\cup A$
- ②设任意$x\in B\cup A\Rightarrow x\in A$或者$x\in B\Rightarrow x\in A\cup B$

经典例题之三——是非判断

判断命题是否正确，并说明理由

习题1.4, 1.9.



习题1.4

(1) $A\subseteq B$, $C\subseteq D$,

$(A\cup C)\subseteq(B\cup D)$, 基本法证明；

$(A\cap C)\subseteq(B\cap D)$, 基本法证明；

(2) $W\subset X$, $Y\subset Z$,

$(W\cup Y)\subset(X\cup Z)$, 反例：$W=\{1, 2\}$, $Y=\{1, 3\}$, $X=\{1, 2, 3\}$, $Z=\{1, 3, 2\}$；则$(W\cup Y)=\{1, 2, 3\}$， $(X\cup Z)=\{1 , 2, 3\}$；

$(W\cap Y)\subset(X\cap Z)$, 反例：$W=\{1, 2\}$, $Y=\{1, 3\}$, $X=\{1, 2, 4\}$, $Z=\{1, 3, 5\}$；则$(W\cap Y)=\{1\}$，$(X\cap Z)=\{1\}$。

习题1.9

学生练习

经典例题之四——幂集

习题1.12 代数法

设A=$\{\varnothing\}$, B=P(P(A)), 问:

(1)$\varnothing \in$ B? $\varnothing \subseteq$ B?

(2)$\{\varnothing\} \in$ B? $\{\varnothing\} \subseteq$ B?

(3)$\{\{\varnothing\}\} \in$ B? $\{\{\varnothing\}\} \subseteq$ B?

*/*重庆大学1998研究生入学考试试题*/*

解：设$x=\varnothing$, 则$P(A)=\{\varnothing, \{x\}\}=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;

设$x=\varnothing$, $y=\{\varnothing\}$, 则$P(A)=\{x, y\}$;

所以，$P(P(A))=\{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$;

回代，$P(P(A))=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

$B=P(P(A))=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

(1) $\varnothing \in B$, $\varnothing \subseteq B$;

(2) $\{\varnothing\} \in B$, $\{\varnothing\} \subseteq B$;

(3) $\{\{\varnothing\}\} \in B$, $\{\{\varnothing\}\} \subseteq B$.

- 例：设A和B为两个集合，则 $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$
- 证明思想：幂集定义和基本法

- 证明：
- 先证$P(A)\cap P(B)\subseteq P(A\cap B)$；

  对任意$X\in P(A)\cap P(B)$, 有$X\in P(A)$且$X\in P(B)$, 所以$X\subseteq A$且$X\subseteq B$, 即$X\subseteq A\cap B$, 因此$X\in P(A\cap B)$；所以$P(A)\cap P(B)\subseteq P(A\cap B)$；
- 再证$P(A\cap B)\subseteq P(A)\cap P(B)$；

  对任意$X\in P(A\cap B)$, 有$X\subseteq A\cap B$, 即$X\subseteq A$且$X\subseteq B$, 所以$X\in P(A)$且$X\in P(B)$, 因此$X\in P(A)\cap P(B)$；所以$P(A\cap B)\subseteq P(A)\cap P(B)$。

所以，$P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$

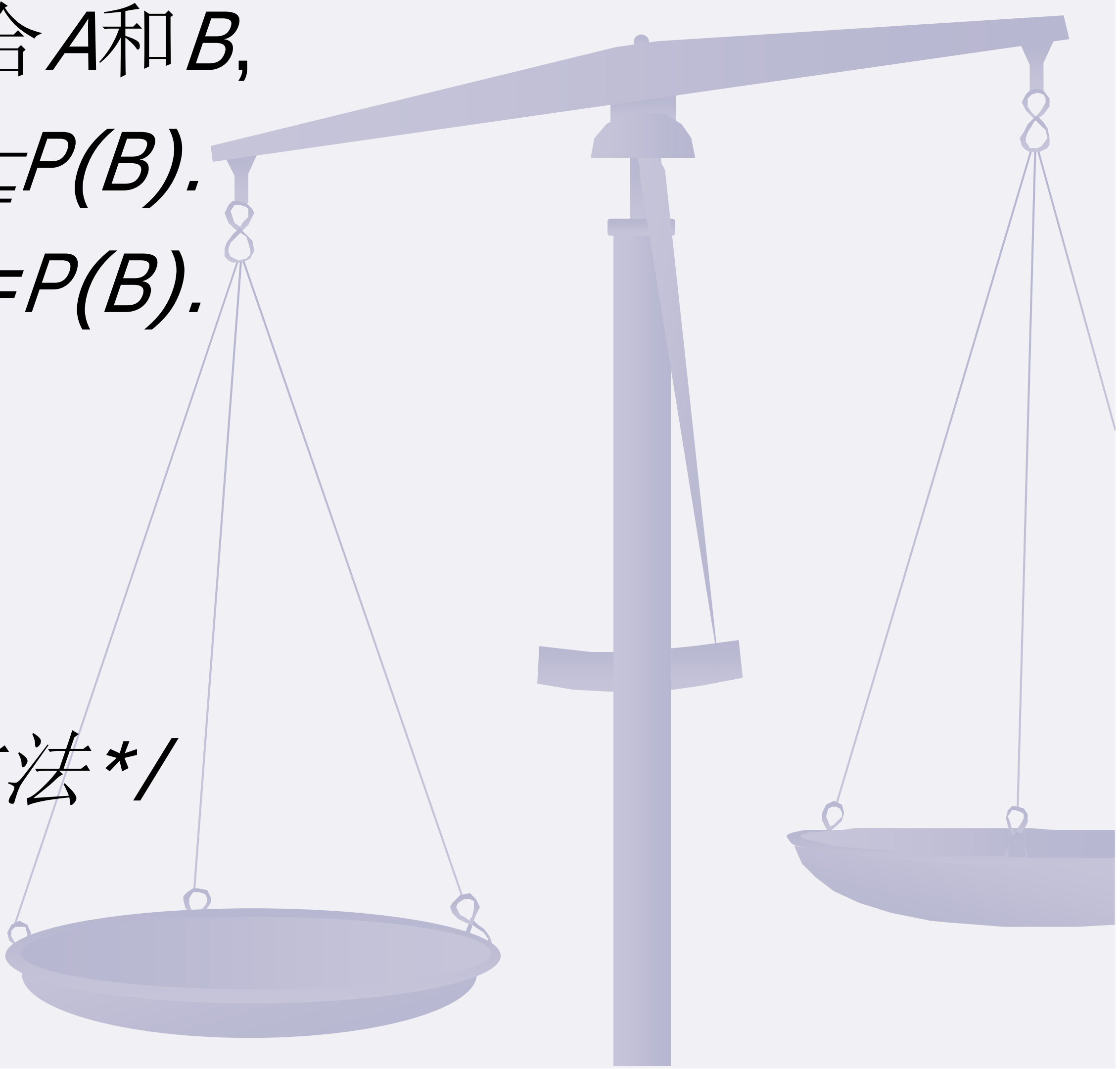
思考练习题——幂集性质的证明

1. 对于任意的集合A和B,

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B).$

(2) $A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B).$

*/*幂集定义和基本法*/*



2. 对于任意的集合A和B, $P(A)\in P(B) \Rightarrow A\in B$.

3. 对于任意的集合A和B,

(1) $P(A)\cap P(B) = P(A\cap B)$

(2) $P(A)\cup P(B) \subseteq P(A\cup B)$

4. 对于任意的集合A和B, $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$.

作业

习题1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.7, 1.9(1),(3),(5), 1.11(1),(2), 1.12, 1.13