5

多值函数 解析延拓 Γ函数

复变函数与实变函数的重要区别之一就是涉及多值函数这一概念。

回顾在复变函数定义中的表述：

对于复变量在某一个区域取的每一个复数值 $z = x + i\,y$，

按照一定的规律，有一个或多个复数值 $w = u + i\,v$ 与之相对应。

因此，可以是多个复数值与一个自变量值相对应，这就是多值函数。

最简单的多值函数例子是根式函数，如平方根。

人们不能像实变函数的平方根那样规定只取算术根作为平方根函数。理由很简单：

对实变函数，当实自变量离开某点之后又返回该点时，平方根的函数值必然返回到原来的值。

对复变函数，平方根的函数值是否回原来的值，与自变量离开再返回起点的路径有关

（参见下一节的详细分析）。因此不能规定只取单一个函数值。

多值函数不仅带来复杂性，还带来一定的混乱。最简单的例子是伯努利诡论：

$$(-z)^2 = z^2 \implies \mathrm{Ln}(-z)^2 = \mathrm{Ln}\,z^2 \implies \mathrm{Ln}(-z) + \mathrm{Ln}(-z) = \mathrm{Ln}\,z + \mathrm{Ln}\,z$$

$$\implies 2\,\mathrm{Ln}(-z) = 2\,\mathrm{Ln}\,z \implies \mathrm{Ln}(-z) = \mathrm{Ln}\,z \implies e^{\mathrm{Ln}(-z)} = e^{\mathrm{Ln}\,z} \implies -z = z$$

现在知道，该诡论的错误之处在于没有考虑到函数的多值性。

实际上：$\mathrm{Ln}\,z + \mathrm{Ln}\,z \neq 2\,\mathrm{Ln}\,z$，因为 $\mathrm{Ln}\,z$ 是多值函数，函数值对应于一个集合（而不是单一个数），因而

$\mathrm{Ln}\,z + \mathrm{Ln}\,z$ 为两个集合的并（和集），当然不会等于一个集合中的每一个元素都乘于 2。

前面介绍的复变函数的导数、解析等概念，都是基于单值函数而言。

那么，对于多值函数，如何推广？

5.1 多值函数及其Riemann面

实际上，对多值函数，在能唯一确定其函数值之前，难以引入导数、解析等概念。

因此，对多值函数，需要先确定函数值。而确定了函数值之后，则可以应用单值函数的概念与性质。

确定多值函数的函数值，需要三个步骤：枝点，割线，上下岸。下称为三要素。

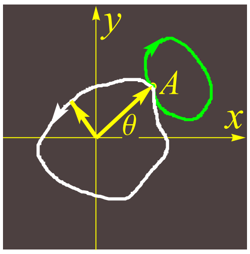
- 枝点：绕其一周回到出发点时，函数 $w = f(z)$ 的值发生改变，称之为函数 $f(z)$的枝点。

  函数之所以会出现多值，是因为在复平面上，当自变量离开某点，

  在复平面上经一条闭合路径，回到原出发点时，函数值可能发生改变。例如：

  $$w = \sqrt{z} \xrightarrow{\text{定义}} \sqrt{|z|}\; e^{i\,\theta/2},\quad 其中\ \theta\ 为\ z\ 的辐角，即：\theta = \arg z$$

如图，从 A 点出发，沿绿色闭合线走一周回 A 点
z 的辐角 θ 不变，因而函数值 w 回到原来的数值
同样出发于 A 点，沿白色线走一周返到 A 点，
辐角 θ 增加了 2π，（行走过程辐角 θ 始终增加）
函数值 $w \Longrightarrow -w$，不回到原来的数值
即：沿某些闭路回起始点，函数值会发生改变，
　　而对另外一些闭路径，函数值不变。
为此，引进枝点概念区分不同的路径。



上例中，$z=0$ 是函数 $w=\sqrt{z}$ 的枝点，因为绕 $z=0$ 行走一周后回到出发点，函数值发生改变。

- 如何找出多值函数的枝点：
  - ▲ 基于定义：在枝点邻域绕行一周回到出发点，函数值发生改变。
  - ▲ 利用（实变函数的）求导法则对函数求导，导函数的奇点通常（很可能）是原函数的枝点，
    当然要再对这些候选点利用枝点的定义进行判断。
    $w=\sqrt{z}$，$w'=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}$，$z=0$ 为 w' 的奇点，故它可能是 w 的枝点，再利用枝点的定义判断。
  - ▲ 与判断奇点和求留数类似，判断枝点时，别忘了绕无穷远一周判断无穷远点是否枝点。
  - ▲ 一个多值函数，枝点通常多于一个。
  - ▲ 若绕一周改变函数值，绕两周返回原函数值，则称为一阶枝点，绕 n 周回原函数值，则称为 $n-1$ 阶枝点。
  - ▲ 枝点是奇点，因为枝点 z_0 是不同单值分支的公共点，z 从不同单值分支趋于 z_0，
    因不同单值分支的函数值 $f(z)$ 不同，导致极限值 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 不同
    也即：极限与 z 趋于 z_0 的方式有关，导数不存在 —— 奇点
    更简单的理解是：直接趋于 z_0 和绕 z_0 折腾几周再趋于 z_0，接近 z_0 时 $f(z)$ 不同，极限值不同，导数不存在。

■ 割线：连接（所有）枝点的直线或曲线

所做的割线应满足：每一个枝点都有割线连出，并且割线只能起始、终止于枝点。

做完割线之后，在复平面内，任何路径都不可能不穿过割线而绕枝点一周。

因此，若规定任何路径均不可穿过割线，就不存在绕枝点的路径，因而函数值就能唯一确定了。

- ▲ 也可这样理解，当路径到达割线并继续延续时，就进入函数的另一个单值分支，
  进入另一个复平面，这些复平面通过割线相粘接，构成多叶Riemann面。
- ▲ 作完割线后，函数尽管是单值的（在复平面内任意行走，只要不穿过割线，回到出发点时，函数值还原），
  但是尚不能确定是取多值集合中的哪一个函数值，因此还需要下一步。

■ 上下岸辐角：定义割线上岸或下岸的辐角，或者给定函数在某点的函数值。

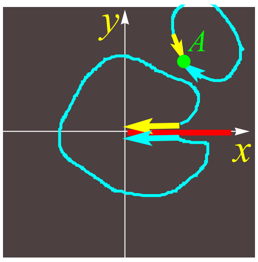
- ▲ 对多值函数，割线上（下）岸的辐角定义可以不同，相应的，函数值也不同。
  这称为选取多值函数的不同单值分支。

■ 除了上述三要素之外，还有一种方法可确定函数值：

即：给定某一点的函数值以及从该点出发到达任意一点的路径。

■ 即使做好割线并定义上下岸辐角值，在枝点，导数依然不存在。实际上，由于在割线的两岸函数不连续，枝点甚至不是孤立奇点。

理解：例如函数 $w=\sqrt{z}=r^{1/2}\,e^{i\,\theta/2}$，$\theta=\arg z$
做割线为从原点沿正实轴到无穷远
在 $z\neq0$ 的任意一点 A，
无论怎么折腾，只要不穿过割线
趋于 A 点时，辐角 $\theta_z=\arg z$ 没有变
函数值 w 的辐角 $\theta_w=\arg w$ 也不变。
但对于原点（是枝点），
沿上岸接近原点与绕到下岸接近原点
（如图黄蓝线）$\theta_z=\arg z$ 分别是 0 和 2π
函数值的辐角 θ_w 分别为：0 与 π



不同的辐角 θ_w 对函数值本身可能没有影响（模趋于 0），但对函数的变化率可能产生影响

也即：以不同方式 $\to0$，变化率的极限值可能不同。因而枝点被认为导数不存在，是奇点。

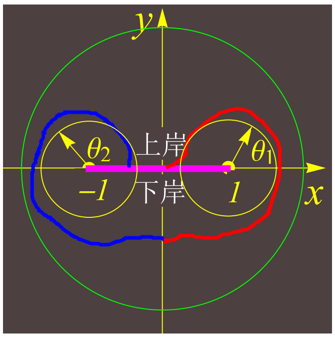
以下通过例题说明枝点、割线、上下岸等概念。

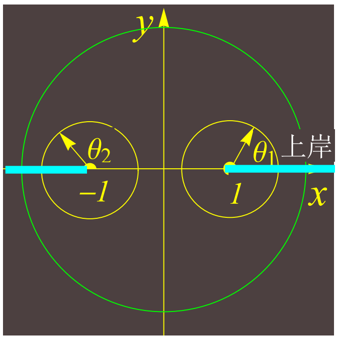
例题：讨论多值函数 $w=f(z)=\sqrt{z^2-1}$。

解：据函数的定义：$w=\sqrt{z^2-1}=\sqrt{|z-1|\,|z+1|}\;e^{i\,(\theta_1+\theta_2)/2}$，$\theta_1=\arg(z-1)$，$\theta_2=\arg(z+1)$

$\theta_1=\arg(z-1)$ 等于从 1 到 z 的矢量与实轴正向的夹角；

$\theta_2=\arg(z+1)=\arg[z-(-1)]$ 为从 -1 到 z 的矢量与实轴正向的夹角；





要确定函数值，需要三要素：枝点、割线、上下岸。

$w=\sqrt{z^2-1}=\sqrt{|z-1|\,|z+1|}\;e^{i\,(\theta_1+\theta_2)/2}$，$\theta_1=\arg(z-1)$，$\theta_2=\arg(z+1)$

枝点：试着求导：$w'=\dfrac{2z}{\sqrt{z^2-1}}$，故 $z=\pm1$ 可能是枝点，同时别忘了判断 $z=\infty$

在 $z=1$ 邻域绕 $z=1$ 逆时针一周回出发点，θ_1 增加了 2π，θ_2 不变，$w\Longrightarrow-w$，是枝点；

绕 $z=-1$ 逆时针一周回出发点，θ_1 不变，θ_2 增加了 2π，$w\Longrightarrow-w$，也是枝点；

在 $z=\infty$ 邻域绕 $z=\infty$ 逆时针一周回出发点，θ_1 增加了 2π，θ_2 也增加了 2π，w 不变，不是枝点。

故：函数 $w=\sqrt{z^2-1}$ 有两个枝点 $z=\pm1$。

割线：连接枝点（保证每一个枝点都有割线连出），为简单起见，取直线。

可以选直接连接 $z=\pm1$ 的直线，如左图紫色线段，

也可以为从 $z=1$，经无穷远点再到达 $z=-1$ 的直线，如右图蓝色的直线

上（下）岸：指定辐角值

如左图，割线取为连接 $z=\pm1$ 的直线，

上岸：$\begin{cases}\theta_1=\pi,\ 3\pi\\ \theta_2=0,\ \ 2\pi\end{cases}$，组合成 4 种情况，但 $\dfrac{(\theta_1+\theta_2)}{2}=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{2}$ 只给出两种不同的函数值

设上岸辐角取为：$\begin{cases}\theta_1=\pi\\ \theta_2=0\end{cases}$，

当 $z=i$ 时，$\begin{cases}\theta_1=\pi-\dfrac{\pi}{4}, & \text{从上岸的点到达 } z=i\text{，矢量 }(z-1)\text{ 顺时针转了 }\dfrac{\pi}{4}\\ \theta_2=0+\dfrac{\pi}{4}, & \text{从上岸的点到达 } z=i\text{，矢量 }(z+1)\text{ 逆时针转了 }\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

$z=-i$ 时，$\begin{cases}\theta_1=\pi+\dfrac{\pi}{4}, & \text{从上岸沿蓝色路径到 } z=-i\text{，}(z-1)\text{ 逆时针转了 }\dfrac{\pi}{4}\\ \theta_2=0+\dfrac{7\pi}{4}, & \text{从上岸沿蓝色路径到 } z=-i\text{，}(z+1)\text{ 逆时针转了 }\dfrac{7\pi}{4}\end{cases}$

$z=-i$ 时，$\begin{cases}\theta_1=\pi-\dfrac{7\pi}{4}, & \text{从上岸沿红色路径到 } z=-i\text{，}(z-1)\text{ 顺时针转了 }\dfrac{7\pi}{4}\\ \theta_2=0-\dfrac{\pi}{4}, & \text{从上岸沿红色路径到 } z=-i\text{，}(z+1)\text{ 顺时针转了 }\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

故：$w(z)=\sqrt{|z^2-1|}\,e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} \implies \begin{cases}w(i)=\sqrt{2}\,e^{\frac{i}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{4}+0+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\,i\\ w(-i)=\sqrt{2}\,e^{\frac{i}{2}\left(\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}\right)}=-\sqrt{2}\,i & \text{从上岸沿蓝色路径到 } z=-i\\ w(-i)=\sqrt{2}\,e^{\frac{i}{2}\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}=-\sqrt{2}\,i & \text{从上岸沿红色路径到 } z=-i\end{cases}$

计算辐角时应注意：

$a)$ 需从已知辐角值的点出发，经一条不穿过割线的路径到达所需要求函数值的点

$b)$ 计算 θ_1 和 θ_2 时必须沿同一条路径，即：计算 θ_1 和 θ_2 都用上图的蓝色，

或都用红色路径，不可以用红色路径计算 θ_1，却用蓝色路径计算 θ_2。

可以验证，上岸辐角取为：$\begin{cases}\theta_1=3\pi\\ \theta_2=2\pi\end{cases}$ 函数值相同，与 $\begin{cases}\theta_1=\pi\\ \theta_2=0\end{cases}$ 属同一个单值分支。

设上岸辐角取为：$\begin{cases}\theta_1=\pi\\ \theta_2=2\pi\end{cases}$，可以求出 $z=i$ 时的 θ_1 与 θ_2

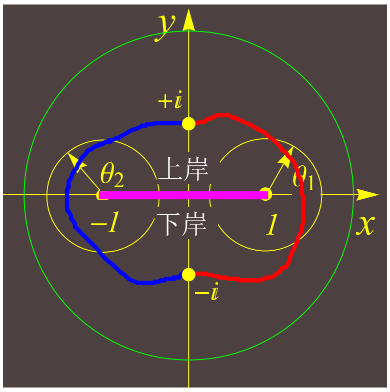
故：$\begin{cases}w(i)=\sqrt{2}\,e^{\frac{i}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{4}+2\pi+\frac{\pi}{4}\right)}=-\sqrt{2}\,i\\ w(-i)=\sqrt{2}\,e^{\frac{i}{2}\left(\pi+\frac{\pi}{4}+2\pi+\frac{7\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\,i\end{cases} \implies w(i)=-w(-i)$

可以验证，上岸辐角取为：$\begin{cases}\theta_1=3\pi\\ \theta_2=0\end{cases}$ 函数值相同，与 $\begin{cases}\theta_1=\pi\\ \theta_2=2\pi\end{cases}$ 属同一个单值分支。

故函数 $w=\sqrt{z^2-1}$ 有两个单值分支。至于属哪一个单值分支，可以由上岸辐角值确定。

也可以由复平面上任意一点的函数值确定。

例如作完割线后给定 $w(i)=-\sqrt{2}\,i$，就确定了单值分支，$w(-i)=?$



设沿上图蓝色线从 $z=i$ 到 $z=-i$，依旧：$\theta_1=\arg(z-1)$, $\theta_2=\arg(z+1)$

$$w(i) = \sqrt{|i-1|\,|i+1|}\; e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)} = \sqrt{2}\; e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)} = -\sqrt{2}\; i$$

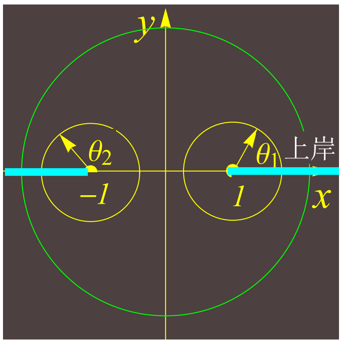
$\Longrightarrow$ 在 $z = i$ 处： $e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)} = -i$

沿蓝色线到 $z = -i$， $\begin{cases} \theta_1 \longrightarrow \theta_1' = \theta_1 + \dfrac{\pi}{2} & \text{矢量 } z-1 \text{ 逆时针转了 } \dfrac{\pi}{2} \\ \theta_2 \longrightarrow \theta_2' = \theta_2 + \dfrac{3\pi}{2} & \text{矢量 } z+1 \text{ 逆时针转了 } \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

$$w(-i) = \sqrt{|-i-1|\,|i+1|}\; e^{\frac{i}{2}(\theta_1'+\theta_2')} = \sqrt{2}\; e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2+2\pi)} = \sqrt{2}\; i$$

沿红色线到 $z = -i$， $\begin{cases} \theta_1 \longrightarrow \theta_1' = \theta_1 - \dfrac{3\pi}{2} \\ \theta_2 \longrightarrow \theta_2' = \theta_2 - \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$，

$$w(-i) = \sqrt{|-i-1|\,|i+1|}\; e^{\frac{i}{2}(\theta_1'+\theta_2')} = \sqrt{2}\; e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2-2\pi)} = \sqrt{2}\; i$$



若取上图割线，并定义 $w(i) = -\sqrt{2}\; i$，则： $w(-i) = -\sqrt{2}\; i = w(i)$

若取上岸： $\begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{cases}$，则： $w(i) = \sqrt{2}\; i = w(-i)$

若取上岸： $\begin{cases} \theta_1 = 2\pi \\ \theta_2 = 0 \end{cases}$，则： $w(i) = -\sqrt{2}\; i = w(-i)$

取不同的割线，函数的“奇偶性”不同。

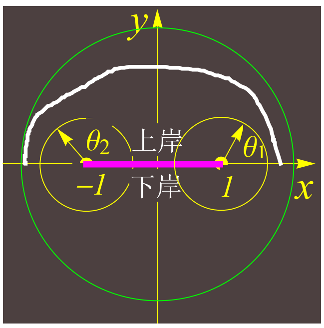
取直接连接 $z = \pm 1$ 的直线作为割线， $w(-i) = -w(i)$，“奇函数”

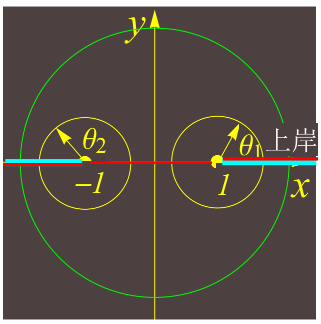
若取连接 $z = 1$， ∞， -1 的直线作为割线， $w(-i) = w(i)$，“偶函数”

在做割线之前，不能判断 $w = \sqrt{z^2-1}$ 是否满足： $w(-z_0) = w(z_0)$，这点与实函数不同 。

例题：为函数 $w = f(z) = \sqrt{z^2-1}$ 做割线，使得当 z 在实轴上时，w 退化为：$w = g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1}, & |x| \geq 1 \\ i\sqrt{1-x^2}, & |x| < 1 \end{cases}$。

解：需要做什么样的割线，并如何定义辐角值，才能保证 $f(z)$ 在实轴上退化为 $g(x)$?





从前题知：$z = \pm 1$ 是 $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ 的枝点，可以有两种不同的割线

左图的割线必导致 $w(-2) = -w(2)$，显然不能退化为 个 $g(x)$，下证之。

设在 $z = 2$ 时，$\arg(z - 1) = \theta_1$，　$\arg(z + 1) = \theta_2$，$w(2) = \sqrt{|2^2 - 1|}\ e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} = \sqrt{3}\ e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$

沿左图白色路径到达 $z = -2$

在 $z = -2$ 时，$\arg(z - 1) = \theta_1' = \theta_1 + \pi$，　$\arg(z + 1) = \theta_2' = \theta_2 + \pi$，

$w(-2) = \sqrt{|2^2 - 1|}\ e^{i(\theta_1'+\theta_2')/2} = \sqrt{3}\ e^{i(\theta_1+\pi+\theta_2+\pi)/2} = -\sqrt{3}\ e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} = -w(2)$

因此，取左图割线无法使得当 z 在实轴上时，$f(z)$ 退化为 $g(x)$，无论在哪一个单值分支 。

只能取如右图之割线 。在右割线的上岸， 定义 $\arg(z - 1) = \theta_1 = 0$, $\arg(z + 1) = \theta_2 = 0$

对实轴上 $x \geq 1$，取右割线上岸 的函数值，$w(z) = \sqrt{|x^2 - 1|}\ e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} = \sqrt{x^2 - 1}$

对实轴上 $x \leq -1$，取左割线下岸 的函数值，$\theta_1' = \theta_1 + \pi$, $\theta_2' = \theta_2 - \pi$

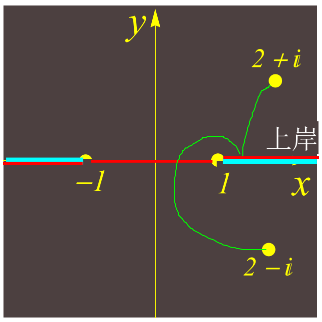
$\theta_1' + \theta_2' = \theta_1 + \theta_2 = 0$，仍有：$w(z) = \sqrt{|x|^2 - 1}\ e^{i(\theta_1'+\theta_2')/2} = \sqrt{x^2 - 1}$

对实轴上 $|x| < 1$，有：$\theta_1'' = \theta_1 + \pi$, $\theta_2'' = \theta_2$,

$\theta_1'' + \theta_2'' = \theta_1 + \pi + \theta_2 = \pi$，故：$w(z) = \sqrt{|x^2 - 1|}\ e^{\frac{i}{2}(\theta_1''+\theta_2'')} = \sqrt{1 - x^2}\ e^{i\pi/2} = i\sqrt{1 - x^2}$

例题：已知函数 $w = f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ 在实轴上退化为：$w(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & |x| \geq 1 \\ i\sqrt{1 - x^2}, & |x| < 1 \end{cases}$,

求：$w'(2)$、 $w'(2 + i)$ 和 $w'(2 - i)$



解：取如上图蓝色之割线 。定义：$\theta_1 \equiv \arg(z - 1)$, $\theta_2 \equiv \arg(z + 1)$

在右上岸，取 $\theta_1 = \theta_2 = 0$，在实轴上即可退化为所要求的函数 （见上一题）。

因为三要素 （枝点、割线、上岸辐角值 ）均已定，故 $w = \sqrt{z^2 - 1}$ 实际上已经是单值函数 。

当然，枝点 $z = \pm 1$ 是函数的奇点 ，除枝点与无穷远点 $z = \infty$ 外，函数在复平面内解析 。

$w'(z) = f'(z) \xrightarrow{\text{求导法则同实变函数}} w'(z) = \dfrac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}$

在实轴 $z = 2$，必须取右割线上岸的点 ，才能满足题意，

故：在 $z = 2$，$\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$

$w'(2) = \dfrac{2}{\sqrt{3}\ e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$,　与实函数比较：$w'(x)\Big|_{x=2} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\Big|_{x=2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$$w'(2+i)=\left.\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right|_{z=2+i}=(2+i)\Big/\left(\sqrt{|2+i+1|\,|2+i-1|}\;e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}\right)=\frac{2+i}{\sqrt[4]{20}}\,e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}$$

其中：从右割线上岸到 $z=2+i$，$\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$，$\theta_2=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$

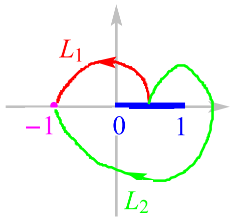
$$w'(2-i)=\left.\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right|_{z=2-i}=(2-i)\Big/\left(\sqrt{|2-i+1|\,|2-i-1|}\;e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}\right)=\frac{2-i}{\sqrt[4]{20}}\,e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{7\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}$$

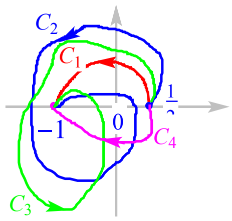
其中：从右割线上岸到 $z=2-i$，$\theta_1=\dfrac{7\pi}{4}$，$\theta_2=-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$ （顺时针）

例题：设 $w(z)=\sqrt{z(1-z)}$ ，试根据下述条件计算：$w(-1)$。

i. 作割线连接 $z=0$ 和 $z=1$，并规定在割线上岸：$\theta_1\equiv\arg(z)=0$，$\theta_2\equiv\arg(1-z)=0$；

ii. 不作割线，规定 $\arg w\left(\frac{1}{2}\right)=0$，$z$ 分别沿如右图路径 C_1 与 C_2 从 $\frac{1}{2}$ 移动到 $z=-1$。





割线为从 $z=0$ 到 $z=1$ 的线段，
右图路径 C_2 与 C_4 相当于穿过割线，
函数值与经 路径 C_2 与 C_4
到达 $z=-1$ 时的函数值不同 。

解：**i.** 在割线上岸，$\theta_1=\theta_2=0$

如沿 L_1 从上岸到达 $z=-1$，$\theta_1=0+\pi$，$\theta_2=0+0$

$\Longrightarrow w(-1)=\sqrt{2}\;e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}=\sqrt{2}\;i$

如果沿 L_2 从上岸到达 $z=-1$，$\theta_1=0-\pi$，$\theta_2=0-2\pi$

$\Longrightarrow w(-1)=\sqrt{2}\;e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}=\sqrt{2}\;e^{\frac{i}{2}(-3\pi)}=\sqrt{2}\;i$

结果是相等的， 也即在做好割线之后 ， 只要路径不穿过割线 ， 函数值就唯一确定 。

当然，必须沿相同的路径求两个辐角 θ_1 与 θ_2 （同为红或绿色路径 ）

ii. 不做割线， 规定在 $z=\dfrac{1}{2}$，$\arg w\left(\dfrac{1}{2}\right)=0,$

即 $z=\dfrac{1}{2}$ 时，$\theta_1=\theta_1^0$，$\theta_2=\theta_2^0$，$\arg w\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{(\theta_1^0+\theta_2^0)}{2}\Longrightarrow(\theta_1^0+\theta_2^0)=0,$

沿 红色路径 C_1 到达 $z=-1$ 时，$\theta_1=\theta_1^0+\pi$，$\theta_2=\theta_2^0$，$\Longrightarrow w(-1)=\sqrt{2}\;e^{\frac{i}{2}(\theta_1^0+\pi+\theta_2^0)}=\sqrt{2}\;i$

沿蓝色路径 C_2 到达 $z=-1$ 时，$\theta_1=\theta_1^0+3\pi$，$\theta_2=\theta_2^0$，$\Longrightarrow w(-1)=\sqrt{2}\;e^{\frac{i}{2}(\theta_1^0+3\pi+\theta_2^0)}=-\sqrt{2}\;i$

可见，沿 C_2，相当于穿过左图的割线 （尽管未画出 ），必跑到另一个单值分支 ，函数值发生改变 。

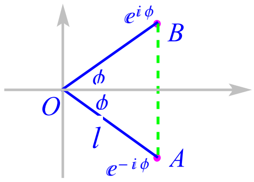
若沿绿色路径 C_3 到达 $z=-1$，$\theta_1=\theta_1^0+\pi$，$\theta_2=\theta_2^0$，$\Longrightarrow w(-1)=\sqrt{2}\;e^{\frac{i}{2}(\theta_1^0+\pi+\theta_2^0)}=\sqrt{2}\;i$

沿 C_3 未穿过割线， 仍在同一个单值分支 ， 函数值仍为 $\sqrt{2}\;i$。

若沿紫色路径 C_4 到达 $z=-1$，$\theta_1=\theta_1^0-\pi$，$\theta_2=\theta_2^0$，$\Longrightarrow w(-1)=\sqrt{2}\;e^{\frac{i}{2}(\theta_1^0-\pi+\theta_2^0)}=-\sqrt{2}\;i$

相当于穿过左图的割线 （$z=0$ 到 $z=1$ 的线段， 未画出 ） 跑到另一个单值分支 ，
函数值不再等于 $\sqrt{2}\;i$。

例题：函数 $w(z)=\sqrt{z-e^{i\phi}}$，$(0<\phi<\pi/2)$，在 $z=0$ 的值 $w(0)=e^{\frac{i}{2}(\phi+\pi)}$，$z$ 从 $z_0=0$ 出发沿直线到达 $z_1=e^{-i\phi}$，求 $w(z_1)$



解：据函数的定义：$w(z)=\sqrt{\left|z-e^{i\phi}\right|}\ e^{i\theta/2}$，其中：$\theta\equiv\arg\left(z-e^{i\phi}\right)$

$z=0$ 时，$w(0)=e^{i\theta/2}=e^{i(\phi+\pi)/2}$，故：$z=0$ 时，$\theta_0=\pi+\phi$

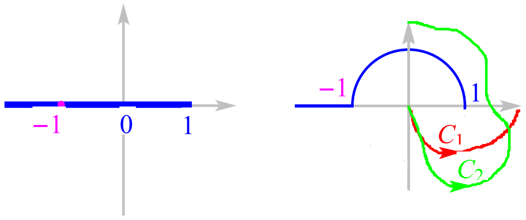
z 从 $z_0=0$ 出发沿直线 l 到达 $z_1=e^{-i\phi}$，$\theta_1=\theta_0+\dfrac{\overbrace{(\pi-2\phi)}^{\angle OBA}}{2}=\dfrac{3\pi}{2}$

故：$w\left(e^{-i\phi}\right)=\sqrt{\left|e^{-i\phi}-e^{i\phi}\right|}\ e^{i\theta_1/2}=\sqrt{2\sin\phi}\ e^{i3\pi/4}$

例题：函数 $w(z)=\ln\left(1-z^2\right)$

解：函数的定义：$w(z)=\ln\left|1-z^2\right|+i\,[\arg(1-z)+\arg(z+1)]$,

枝点：$z=\pm1$ 和 ∞，做割线如左图，连接三个枝点。



也可做割线如右图。现做如右图割线，已知 $w(0)=0$，求 $w(3)$ 与$w(3i)$。

令：$\theta_1\equiv\arg(1-z)$，$\theta_2=\arg(z+1)$

$z=z_0=0$ 时：$w(0)=i\left(\theta_1^0+\theta_2^0\right)=0$，$\Longrightarrow\ \theta_1^0+\theta_2^0=0$

$z=z_1=3$ 时：沿 C_1 从 z_0 到 z_1，$\theta_1=\theta_1^0+\pi$，$\theta_2=\theta_2^0$，$w(3)=\ln8+i\pi$

$z=z_2=3i$ 时：沿 C_2 从 z_0 到 z_2，$\theta_1=\theta_1^0+(2\pi-\operatorname{arctg}3)$，$\theta_2=\theta_2^0+\operatorname{arctg}3$，$w(3i)=\ln10+2i\pi$

***Mathematica* 中的根式函数**

Mathematica 中的根式函数

5.2 涉及多值函数的积分

若实变函数积分中涉及对数函数，根式函数，在利用留数定理计算积分时，将单值的实变函数拓展成复变函数时，
必然涉及多值函数，这时必须做适当的割线，恰当地定义（选取）单值分支，
才能保证复变函数在某些积分路径上退化为实变函数积分。以下通过例题说明。

例题：计算积分：$I=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

解：选取：$f(z)=\dfrac{\ln z}{\left(1+z^2\right)^2}$，希望在实轴上，$f(z)$ 能退化为：$\dfrac{\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}$

$f(z)$ 是多值函数，枝点为 0 和 ∞，连接 0 与 ∞ 作为割线（如图红线）

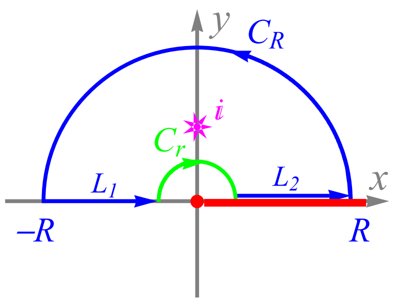
在割线上岸，定义 $\theta = \arg z = 0$，这样在割线上岸，$f(z)$ 退化为 $f(x)$

积分回路如上图。回路内有二阶极点 $z = i$

$$\oint_C = \int_{L_1} + \int_{C_r} + \int_{L_2} + \int_{C_R} = 2\pi i \operatorname{Res} f(i) = 2\pi i \lim_{z\to i}\left[\frac{\ln z}{(z+i)^2}\right]'$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to i}\left[\frac{(z+i) - 2z\ln z}{z(z+i)^3}\right] = 2\pi i\,\frac{\pi + 2i}{8},\ \text{其中：}\ \ln i = i\,\frac{\pi}{2}$$

$$L_1:\ z = x\,e^{i\pi},\ \Longrightarrow \int_{L_1} = \int_R^r \frac{\ln x + i\pi}{(1+x^2)^2}\,e^{i\pi}\,dx = I + \int_0^\infty \frac{i\pi\,dx}{(1+x^2)^2}$$



$$L_2:\ z = x\,e^{i0},\ \Longrightarrow \int_{L_2} = \int_r^R \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = I$$

$$C_r:\ \text{因为}\ \lim_{z\to 0} z\,f(z) = 0 \xrightarrow{\text{小圆弧引理}} \int_{C_r} = 0$$

$$C_R:\ \text{因为}\ \lim_{z\to\infty} z\,f(z) = 0 \xrightarrow{\text{大圆弧引理}} \int_{C_R} = 0$$

$$\text{综上：}\ I = -\frac{\pi}{4},\ \text{并且：}\ \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}$$

❀ *Mathematica* 试一试，被积函数的原函数不是初等函数，而是 polylog 函数。

```
Clear["Global`*"]
f[x_] := Log[x]/(1 + x^2)^2;
Integrate[f[x], x];
FullSimplify[%]
Integrate[f[x], {x, 0, ∞}]
```

```
1/(4 (1 + x^2)) (2 (1 + x^2) ArcTan[x] (-1 + Log[x]) +
   2 x Log[x] - i (1 + x^2) PolyLog[2, -i x] + i (1 + x^2) PolyLog[2, i x])
```

```
-π/4
```

例题：计算积分

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\, dx}{1+x},\quad 0<\alpha<1 \qquad \text{比较 上节例题：}\quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^x+1}\, dx \tag{1.1}$$

☸ *Mathematica* 试一试，被积函数的原函数不是初等函数 ，是超几何函数 。

```
t = Integrate[x^(a-1)/(1 + x), x, Assumptions :> {a > 0 && a < 1}]
tt = Integrate[E^(a x)/(1 + E^x), x, Assumptions :> {a > 0 && a < 1}]
Limit[t, x → 0, Assumptions :> {a > 0 && a < 1}]
Limit[t, x → ∞, Assumptions :> {a > 0 && a < 1}];
FullSimplify[%]
```

```
x^a/a - 1/(1 + a) x^(1+a) Hypergeometric2F1[1, 1 + a, 2 + a, -x]
```

```
1/a E^(a x) Hypergeometric2F1[1, a, 1 + a, -E^x]
```

```
0
```

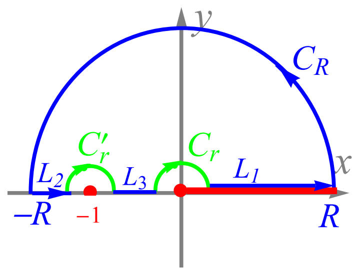
```
π Csc[a π]
```

解：$f(z) = \dfrac{z^{\alpha-1}}{z+1}$，多值函数，枝点 $z=0$ 和 $z=\infty$，割线如图红线

定义割线上岸 $\theta \equiv \arg z = 0$，以保证在 L_1 上 $f(z)$ 退化为 $f(x)$

$z=0$ 是枝点，必为奇点，因此要做一个小圆弧 C_r

如取右图闭合回路 ，则回路内无奇点



有：$\displaystyle\int_{L_1} + \int_{C_R} + \int_{L_2} + \int_{L_3} + \int_{C_r'} + \int_{C_r} = 0$

L_1：$\displaystyle\int_{L_1} f(z)\, dz = I,$

C_R：因 $\lim\limits_{z\to\infty} z f(z) = 0 \xrightarrow{\text{大圆弧引理}} \displaystyle\int_{C_R} f(z)\, dz = 0$

$L_2 + L_3$：$z = x\, e^{i\pi}$，$\displaystyle\int_{L_2+L_3} f(z)\, dz = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\, e^{i(\alpha-1)\pi}\, dx}{x\, e^{i\pi}+1} = e^{i(\alpha-1)\pi} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\, dx}{1-x}$ 不同于：$I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\, dx}{1+x}$,

取右图闭合回路 ，则回路内有奇点 $z=-1=e^{i\pi}$

有：$\int_{L_1}+\int_{C_R}+\int_{L_2}+\int_{C_r} = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,f(-1) = 2\pi i\,e^{i(\alpha-1)\pi}$

L_1：$\int_{L_1} f(z)\,dz = I,$

C_R：因 $\lim_{z\to\infty} z\,f(z) = 0 \xrightarrow{\text{大圆弧引理}} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$

L_2：$z = x\,e^{i\,2\pi}$（注意不能写成 $z=x$），$dz = e^{i\,2\pi}\,dx$

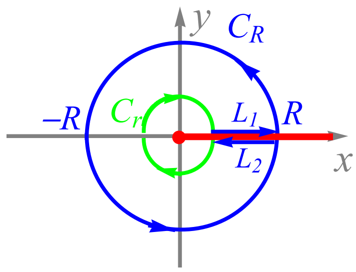
对多值函数，$z = x\,e^{i\,2\pi}$ 与 $z=x$ 意义是不同的

$$\int_{L_2} f(z)\,dz = \int_\infty^0 \frac{\left(x\,e^{i\,2\pi}\right)^{(\alpha-1)}\,dx}{x\,e^{i\,2\pi}+1}$$

$$= -\,e^{i\,2(\alpha-1)\pi}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{x+1} = -e^{i\,2\alpha\pi}\,I$$

C_r：因 $\lim_{z\to 0} z\,f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^\alpha}{1+z} = 0 \xrightarrow{\text{小圆弧引理}} \int_{C_r} f(z)\,dz = 0$

综上：$\left(1-e^{i\,2\alpha\pi}\right)I = 2\pi i\,e^{i(\alpha-1)\pi}, \quad \Longrightarrow \quad I = \dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi}$



例题：计算积分

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,\ln x\,dx}{x^3+1},$$ （涉及多值函数奇点辐角取值范围 ）

```
Clear["Gloabal`*"]
f[x_] := (Sqrt[x] Log[x])/(1 + x^3);
t = Integrate[f[x], x]
Limit[t, x → 0]
Limit[t, x → ∞]
Integrate[f[x], {x, 0, ∞}]
```

$\frac{1}{9}\left(-4\,x^{3/2}\,\mathrm{HypergeometricPFQ}\left[\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right\},\left\{\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\},-x^3\right] + 6\,\mathrm{ArcTan}\left[x^{3/2}\right]\mathrm{Log}[x]\right)$

0

0

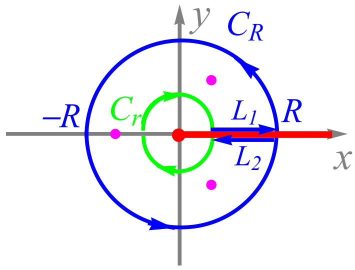
0

解：$f(z) = \dfrac{\sqrt{z}\,\ln z}{z^3+1}$，枝点 $z=0$ 和 $z=\infty$，割线如图红线，上岸 $\theta = \arg z = 0$

积分回路如图，回路内有单极点 $z_k = e^{i(2k-1)\pi/3}$, $k = 1, 2, 3$

既然涉及无穷阶枝点，为何奇点只取到 $k = 3$?

（答：　　　　　　　　　　　　　　）



$$\int_{L_1} + \int_{C_R} + \int_{L_2} + \int_{C_r} = 2\pi i \sum_{k=1}^{3} \text{Res}\, f(z_k)$$

$$\text{Res}\, f(z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{\sqrt{z}\ \ln z}{(z^3+1)'} = \frac{e^{i\pi/6}\, i\, \frac{\pi}{3}}{3\left(e^{i\pi/3}\right)^2} = \frac{\pi}{9},$$ 类似可求得

$$\text{Res}\, f(z_2) = \frac{5\pi}{9},\quad \text{Res}\, f(z_3) = -\frac{\pi}{3},$$

L_1：$z = x$, $\displaystyle\int_{L_1} f(z)\, dz = I,$

L_2：$z = x\, e^{i 2\pi}$, $\displaystyle\int_{L_2} f(z)\, dz = \int_{\infty}^{0} \frac{\sqrt{x}\ e^{i\pi}(\ln x + i 2\pi)\, dx}{x^3+1} = I + 2\pi i \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ dx}{x^3+1}$

由 大圆弧、小圆弧引理：$\displaystyle\int_{C_R} f(z)\, dz = 0$，$\displaystyle\int_{C_r} f(z)\, dz = 0$

综上：$\displaystyle 2I + 2\pi i \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ dx}{x^3+1} = 2\pi i\, \frac{\pi}{3}, \xRightarrow{\text{比较方程两边虚实部}} I = 0,$ 且：$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ dx}{x^3+1} = \frac{\pi}{3}$

例题：计算积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ \ln x\, dx}{(x+1)^2},$$ （涉及多值函数的导数）

```
Clear["Gloabal`*"]
f[x_] := Sqrt[x] Log[x]/(1 + x)^2;
t = Integrate[f[x], x]
Limit[t, x → 0]
Limit[t, x → ∞]
Integrate[f[x], {x, 0, ∞}]
```

$$\frac{1}{9(1+x)}\left(-4 x^{3/2}(1+x)\, \text{HypergeometricPFQ}\left[\left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2\right\}, \left\{\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}, -x\right] + 9\left(-\sqrt{x} + (1+x)\, \text{ArcTan}\left[\sqrt{x}\right]\right) \text{Log}[x]\right)$$

0

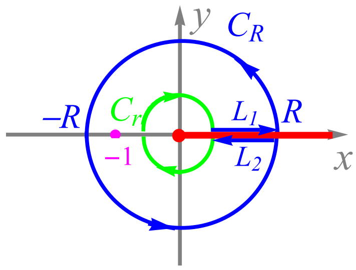
π

π

解：$f(z)=\dfrac{\sqrt{z}\,\ln z}{(z+1)^2}$， 枝点 $z=0$ 和 $z=\infty$，割线如图红线， 上岸 $\theta=\arg z=0$

积分回路如图， 回路内有一个二阶极点 $z=-1=e^{i\pi}$

$$\int_{L_1}+\int_{C_R}+\int_{L_2}+\int_{C_r}=2\pi i\,\mathrm{Res}\,f(-1)$$



$$\mathrm{Res}\,f(-1)=\lim_{z\to-1}\left(\sqrt{z}\,\ln z\right)'=\lim_{z\to-1}\left(\frac{\ln z+2}{2\sqrt{z}}\right)$$

$$=\frac{i\pi+2}{2i}=\frac{\pi}{2}-i,\quad \text{其中 } z=-1=e^{i\pi}$$

L_1： $z=x$， $\displaystyle\int_{L_1}f(z)\,dz=\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}\,\ln x}{(x+1)^2}\,dx=I$

L_2： $z=x\,e^{i2\pi}$， $\displaystyle\int_{L_2}f(z)\,dz=\int_\infty^0\frac{\sqrt{x}\;e^{i\pi}(\ln x+i\,2\pi)\,dx}{(x+1)^2}=I+2\pi i\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}\;dx}{(x+1)^2}$

由 大圆弧、小圆弧引理： $\displaystyle\int_{C_R}f(z)\,dz=0$， $\displaystyle\int_{C_r}f(z)\,dz=0$

综上： $\displaystyle 2I+2\pi i\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}\;dx}{(x+1)^2}=2\pi i\left(\frac{\pi}{2}-i\right)$， $\Longrightarrow$ $I=\pi$， 且： $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}\;dx}{(x+1)^2}=\frac{\pi}{2}$

例题：计算积分

$$I=\int_0^\infty\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(\ln^2x+\pi^2\right)},$$ 不失一般性， 设： $a>0$

呵呵， 终于找到一个连 *Mathematica* (至少 10.2 版) 也做不出的积分啦， 正如李世石的第四局 。

```
Clear["Gloabal`*"]
f[x_] := 1/((a^2 + x^2) (Log[x]^2 + π^2));
Integrate[f[x], x, Assumptions :→ {a > 0}]
Integrate[f[x], {x, 0, ∞}, Assumptions :→ {a > 0}]
```

```
Integrate[1/((a^2 + x^2) (π^2 + Log[x]^2)), x, Assumptions :→ {a > 0}]
```

```
Integrate[1/((a^2 + x^2) (π^2 + Log[x]^2)), {x, 0, ∞}, Assumptions :→ {a > 0}]
```

```
Integrate[f[x] /. a → 1, {x, 0, ∞}]
```

$$\int_0^\infty\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(\pi^2+\mathrm{Log}[x]^2\right)}\,dx$$

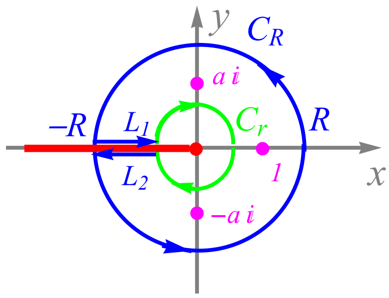
解：$f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+a^2\right)\left(\ln^2x+\pi^2\right)}$， 构造复变函数： $g(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+a^2\right)\ln z}$，

枝点 $z=0$ 和 $z=\infty$，割线如图红线，

上岸 $\theta\equiv\arg z=\pi$，下岸 $\theta=-\pi$

积分回路如图，回路内有三个单极点

$z=\pm a\,i=a\,e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$ 和 $z=1$



$$\int_{L_1}+\int_{C_r}+\int_{L_2}+\int_{C_R}=2\pi i\sum_k \mathrm{Res}\,g(z_k)$$

$$\mathrm{Res}\,g(a\,i)=\lim_{z\to a\,i}\frac{1/\ln z}{(z^2+a^2)'}\quad\left(z=a\,i=a\,e^{i\pi/2}\right)$$

$$=\frac{1\Big/\left(\ln a+\frac{i\pi}{2}\right)}{2\left(a\,e^{i\pi/2}\right)}=\frac{1}{a\,i\,(2\ln a+i\pi)}$$

$$\mathrm{Res}\,g(-a\,i)=\lim_{z\to -a\,i}\frac{1/\ln z}{(z^2+a^2)'}=\frac{1\Big/\left(\ln a-\frac{i\pi}{2}\right)}{2\left(a\,e^{-i\pi/2}\right)}=-\frac{1}{a\,i\,(2\ln a-i\pi)}$$

$$\mathrm{Res}\,g(1)=\lim_{z\to 1}\frac{1/(z^2+a^2)}{(\ln z)'}=\frac{1}{a^2+1},$$ $z=1$ 是 $\ln z$ 的一阶 0 点，是 $g(z)$ 的单极点

$$L_1:\ z=x\,e^{i\pi},\quad \int_{L_1}g(z)\,dz=\int_\infty^0\frac{e^{i\pi}\,dx}{(x^2+a^2)(\ln x+i\pi)}=\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln x+i\pi)}$$

$$L_2:\ z=x\,e^{-i\pi},\quad \int_{L_2}g(z)\,dz=\int_0^\infty\frac{e^{-i\pi}\,dx}{(x^2+a^2)(\ln x-i\pi)}=-\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln x-i\pi)}$$

$$\int_{L_1}g(z)\,dz+\int_{L_1}g(z)\,dz=-2\pi i\,I$$

由 大圆弧、小圆弧引理：$\int_{C_R}f(z)\,dz=0$，$\int_{C_r}f(z)\,dz=0$

综上：$I=\frac{1}{a\,i}\,\frac{2\pi i}{4\ln^2 a+\pi^2}-\frac{1}{a^2+1}$

❀ *Mathematica* (至少 10.2 版) 只能做数值积分，不妨试试更高版本，if any

```
a0 = 1 / 2;
NIntegrate[1/((a^2 + x^2) (Log[x]^2 + π^2)) /. a → a0, {x, 0, ∞}, WorkingPrecision → 20]
(1/(a i) (2 π i)/(4 Log[a]^2 + π^2) - 1/(a^2 + 1)) /. a → a0
N[%, 20]
```

```
0.26572188849733879316
```

$$-\frac{4}{5}+\frac{4\pi}{\pi^2+4\,\mathrm{Log}[2]^2}$$

```
0.26572188849733879318
```

例题：计算积分

$$I=\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}=2\int_0^\infty \cos t^2\,dt$$ Fresnel 积分 （涉及多值函数的 Jordan 引理，奇点辐角 ）

```
Clear["Gloabal`*"]
f[x_] := Cos[x]/Sqrt[x];
Integrate[f[x], x]
Integrate[f[x], {x, 0, ∞}]
```

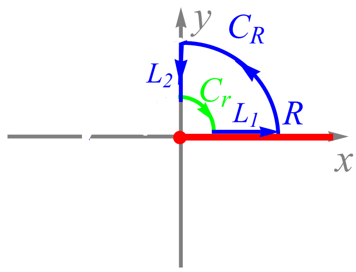
$\sqrt{2\pi}$ FresnelC$\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{x}\right]$

$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

解：$g(z)=\dfrac{e^{iz}}{\sqrt{z}}$，$f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{z}}$

枝点 $z=0$ 和 $z=\infty$，割线如图红线， 上岸 $\theta\equiv\arg z=0$

积分回路如图， 回路内无奇点



$$\int_{L_1}+\int_{C_R}+\int_{L_2}+\int_{C_r}=0$$

L_1： $z=x$， $\displaystyle\int_{L_1} g(z)\,dz=\int_0^\infty \frac{e^{ix}\,dx}{\sqrt{x}}$

C_R： 由 Jordan引理， $\displaystyle\int_{C_R} g(z)\,dz=0$

C_r： 由 小圆弧引理： $\displaystyle\int_{C_r} g(z)\,dz=0$

L_2： $z=x\,e^{i\pi/2}$， $\displaystyle\int_{L_2} g(z)\,dz=\int_\infty^0 \frac{e^{-x}\,e^{i\pi/2}\,dx}{\sqrt{x}\;e^{i\pi/4}}=-e^{i\pi/4}\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}}$

$$=-2\,e^{i\pi/4}\int_0^\infty e^{-x}\,d\sqrt{x}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1+i)$$

综上： $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}=\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

例题：计算积分

$$I=\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p\,dx}{x^2+1},\quad -1<p<2$$ （涉及多值函数的极限 、无穷远点的留数， 回路选取方法 ）

```
Clear["Gloabal`*"]
f[x_] := x^(1-p) (1 - x)^p / (x^2 + 1);
Integrate[f[x], x, Assumptions :> {p > -1 && p < 2}]
Integrate[f[x], {x, 0, 1}, Assumptions :> {p > -1 && p < 2}]
```

```
Integrate[(1 - x)^p x^(1-p) / (1 + x^2), x, Assumptions :> {p > -1 && p < 2}]
```

```
π (-1 + 2^(p/2) Cos[p π / 4]) Csc[p π]
```

解：$f(z)=\dfrac{z^{1-p}(1-z)^p}{z^2+1}$，当然也可以取：$g(z)=\dfrac{z^{1-p}(z-1)^p}{z^2+1}$ （不妨作为练习）

因为 p 可以是小数，故 $z=0$ 和 $z=1$ 为枝点

$z=\infty$ 是不是枝点？不是。（试验证）

作割线如图红色直线连接 $z=0$ 和 1

上岸 $\theta\equiv\arg z=0$，$\theta_1\equiv\arg(1-z)=0$

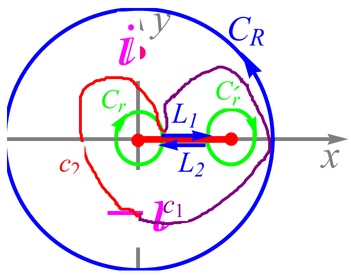
积分路径如图 L_1, C_r', L_2, C_r

可以包括 C_R，也可以不包括 C_R

以下假设积分路径包括 C_R

回路内有奇点 $z=\pm i$，

若回路包括 C_R，则可去奇点 $z=\infty$ 不在回路内



$$\int_{L_1}+\int_{C_r'}+\int_{L_2}+\int_{C_r}+\int_{C_R}=2\pi i\,[\mathrm{Res}\,f(i)+\mathrm{Res}\,f(-i)] \tag{1.2}$$

$z=i$ 时，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\theta_1=-\dfrac{\pi}{4}$ （从 L_1 上的点到 $z=i$，$(1-z)$ 矢量顺时针转 $\dfrac{\pi}{4}$）

$$\mathrm{Res}\,f(i)=\lim_{z\to i}\frac{z^{1-p}\left(1-z\right)^p}{\left(z^2+1\right)'}=\frac{1}{2i}|i|^{1-p}\,e^{i(1-p)\theta}\,|1-i|^p\,e^{i p\theta_1}=2^{(p-2)/2}\,e^{-i p 3\pi/4}$$

$z=-i$ 时，沿 c_1 从上岸到达 $-i$，则：$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$，$\theta_1=-\dfrac{7\pi}{4}$

$$\mathrm{Res}\,f(-i)=\lim_{z\to i}\frac{z^{1-p}\left(1-z\right)^p}{\left(z^2+1\right)'}=\frac{1}{-2i}|-i|^{1-p}\,e^{i(1-p)\theta}\,|1+i|^p\,e^{i p\theta_1}=2^{(p-2)/2}\,e^{-i p 5\pi/4}$$

$z=-i$ 时，若是沿 c_2 从上岸到达 $-i$，则：$\theta=\dfrac{3\pi}{2}$，$\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$

$$\mathrm{Res}\,f(-i)=\lim_{z\to i}\frac{z^{1-p}\left(1-z\right)^p}{\left(z^2+1\right)'}=\frac{1}{-2i}|-i|^{1-p}\,e^{i(1-p)\theta}\,|1+i|^p\,e^{i p\theta_1}=2^{(p-2)/2}\,e^{-i p 5\pi/4}$$

L_1：$z=x$，$\theta=\theta_1=0$，$\displaystyle\int_{L_1}f(z)\,dz=\int_0^1\left(x^{1-p}\,e^{i(1-p)\theta}(1-x)^p\,e^{i p\theta_1}\,dx\right)\Big/\left(x^2+1\right)=I$

L_2：$z=x\,e^{i\theta}$，$\theta=0$，$\theta_1=-2\pi$，$\displaystyle\int_{L_2}f(z)\,dz=\int_1^0\left(x^{1-p}\,e^{i(1-p)\theta}(1-x)^p\,e^{i p\theta_1}\,dx\right)\Big/\left(x^2+1\right)=-e^{-i2p\pi}I$

C_r：$\displaystyle\lim_{z\to 0}z\,f(z)=0$，由 小圆弧引理：$\displaystyle\int_{C_r}f(z)\,dz=0$

C_r': $\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=0$, 由 小圆弧引理： $\int_{C_r'} f(z)\,dz=0$

C_R: $K=\lim_{z\to\infty} z\,f(z)$，由大圆弧引理， $\int_{C_R} f(z)\,dz=2\pi i K$

$$K=\lim_{z\to\infty}\frac{z^{2-p}(1-z)^p}{z^2+1}=\lim_{z\to\infty}\frac{z^2}{z^2+1}\frac{(1-z)^p}{z^p}=\lim_{z\to\infty}\frac{(1-z)^p}{z^p}$$

显然：$|K|=1$，那么：$\theta_K\equiv\arg K=?$

需要求：$z\to\infty$ 时，$\theta\equiv\arg z=?$, $\theta_1\equiv\arg(1-z)=?$

求辐角，应从已知辐角的点出发 。

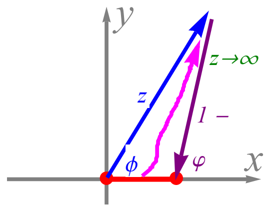
已知在割线上岸 $\theta=\theta_1=0$，

从上岸沿右图紫色线从上半平面趋于无穷

z 矢量逆时针转 ϕ，$\theta=\arg z=\phi$

$(1-z)$ 矢量顺时针转 $(\pi-\varphi)$，$\theta_1=\arg(1-z)=-(\pi-\varphi)$

当 $z\to\infty$ 时，$\varphi\to\phi$, $\Longrightarrow$ $\theta=\phi$, $\theta_1=\phi-\pi$



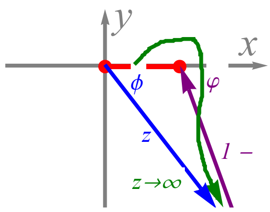
$$K=\lim_{z\to\infty}\frac{(1-z)^p}{z^p}=\lim_{z\to\infty}\frac{|1-z|^p}{|z|^p}\frac{e^{ip\theta_1}}{e^{ip\theta}}=e^{ip(\theta_1-\theta)}=e^{-ip\pi}$$

或者，从上岸沿右图绿线从下半平面趋于无穷

z 矢量顺时针转 ϕ，$\theta=\arg z=-\phi$

$(1-z)$ 矢量顺时针转 $(\pi+\varphi)$，$\theta_1=\arg(1-z)=-(\pi+\varphi)$

当 $z\to\infty$ 时，$\varphi\to\phi$, $\Longrightarrow$ $\theta=-\phi$, $\theta_1=-\pi-\phi$



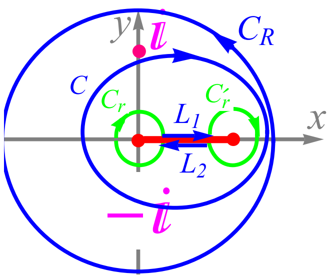
$$K=\lim_{z\to\infty}\frac{(1-z)^p}{z^p}=\lim_{z\to\infty}\frac{|1-z|^p}{|z|^p}\frac{e^{ip\theta_1}}{e^{ip\theta}}=e^{ip(\theta_1-\theta)}=e^{-ip\pi}$$

综上：$\left(1-e^{-i2p\pi}\right)I+2\pi i K=2\pi i\,2^{(p-2)/2}\left(e^{-ip5\pi/4}+e^{-ip3\pi/4}\right)$

化简：$I=\left(2\pi i\,2^{(p-2)/2}\left(e^{-ip5\pi/4}+e^{-ip3\pi/4}\right)-2\pi i\,e^{-ip\pi}\right)\Big/\left(1-e^{-i2p\pi}\right)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi}\left(2^{p/2}\cos\dfrac{p\pi}{4}-1\right)$

```
t = (2 π i 2^((p-2)/2) (e^(-i p 5 π/4) + e^(-i p 3 π/4)) - 2 π i e^(-i p π)) / (1 - e^(-i 2 p π));
FullSimplify[t]
```

```
π (-1 + 2^(p/2) Cos[p π/4]) Csc[p π]
```



- 若积分路径中不包括 C_R，用Cauchy定理的推论，积分路径 $L_1+C_r'+L_2+C_r$ 的积分可连续变形至上图 C 回路的积分，从而有

$$\int_{L_1}+\int_{C_r'}+\int_{L_2}+\int_{C_r}=\int_C=2\pi i\times[C\text{外所有奇点的留数和}]=2\pi i\,[\mathrm{Res}\,f(i)+\mathrm{Res}\,f(-i)+\mathrm{Res}\,f(\infty)]$$

但 $-\int_{C_R}=2\pi i\,\mathrm{Res}\,f(\infty)$, $\Longrightarrow$ $\int_{L_1}+\int_{C_r'}+\int_{L_2}+\int_{C_r}+\int_{C_R}=2\pi i\,[\mathrm{Res}\,f(i)+\mathrm{Res}\,f(-i)]$

与 (1.2) 式完全相同 。

- 试求积分

$$I=\oint_{|z|=2}f(z)\,dz,\quad f(z)=\frac{z^{1-p}(1-z)^p}{z^2+1},\quad \text{实际上}\oint_{|z|=2}f(z)\,dz=\oint_{C_R}f(z)\,dz=-2\pi i\,\mathrm{Res}\,f(\infty)$$

小课题：试编写 Mathematica 程序计算下列积分（并在以后的讨论课中 give a presetation）

$$c_m=\int_{-\infty}^{+\infty}(p-i\,q)^m\,e^{-q^2+\frac{i}{3}(q^3-3q)}\,dq,\quad \text{其中：}\ p=\begin{cases}\sqrt{1-q^2}\,, & \text{if } q^2\le 1\\ i\sqrt{q^2-1}\,, & \text{if } q^2>1\end{cases},$$

程序要能计算 $m=\pm 100$ 时 c_m 的值，并且程序不使用超出16位有效数字的超常精度数值算法 。

5.3 解析延拓

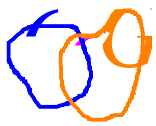
- 何谓解析延拓

定义：设函数$f_1(z)$在区域G_1内解析，函数$f_2(z)$在区域G_2内解析，在G_1与G_2的公共区域$g=G_1\cap G_2$内，$f_1(z)=f_2(z)$，

则称$f_1(z)$为$f_2(z)$在G_1内的解析延拓，反过来，$f_2(z)$为$f_1(z)$在G_2内的解析延拓。

作函数

$$F(z)=\begin{cases}f_1(z), & z\in G_1\\ f_2(z), & z\in G_2\end{cases},$$



则函数 $F(z)$ 在 $G_1\cup G_2$ 解析。

- 解析延拓的用途

  - 在某区域有定义的解析函数，可以用解析延拓的办法扩大其定义域，得到在更大的范围内解析的新函数，一个典型的例子是 Γ 函数。
  - 已知物理问题或数学问题的解是在某区域 G 内除有限个奇点外的解析函数，但我们仅能在 G 的某一个子区域 S 内求出这个解，利用解析延拓，即可得到整个区域 G 内的解。这个方法在求解微分方程时经常使用，当然，在物理问题中也有许多应用。

- 解析延拓的唯一性。

  - 解析函数的唯一性定理

设函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在区域 G 内解析，在 G 内的某点数列 $\{z_k\}$, $(k=1,2,3,\ldots)$ 上 $f_1(z)=f_2(z)$，如点数列 $\{z_k\}$ 在 G 内至少有一个聚点，则在区域 G 内：$f_1(z)=f_2(z)$。

证明：这个定理告诉我们，若两个在区域 G 内解析的函数，

在区域内的某条曲线上或某个子区域 （充分条件） 相等，则这两个函数在整个区域内都相等 。

该定理的证明思路是 ：

1. 先证明两个函数之差在点数列的聚点 a 上为 0;

   因为数列的聚点不一定属于数列本身 ，故需要这一步 。

2. 再证明该聚点不是孤立零点 ，因 解析函数的零点是孤立的 ，非孤立零点意味着该解析函数恒为零 。

以下证明这两点 。

1. 定义两函数之差 $g(z)=f_1(z)-f_2(z)$，因为 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 解析，故 $g(z)$ 解析。

设 a 是点数列 $\{z_k\}$ 的一个聚点，且 $a\in G$，故 $g(z)$ 在 a 点解析，因而 $g(z)$ 必然连续。

若 $g(a)\neq 0$，对连续函数，必存在一个 δ，使得 $|z-a|<\delta$ 时，$g(z)\neq 0$。

但 a 又是点数列的聚点，意味着对任意 δ，在 $|z-a|<\delta$ 内必然存在属于点数列的点。

而在点数列上，$g(z_k)=0$，也就是说，对任意 δ，邻域 $|z-a|<\delta$ 内必存在 $g(z)$ 的零点

这与 "必存在一个 δ，使得 $|z-a|<\delta$ 时，$g(z)\neq 0$" 矛盾，故 $g(a)=0$。

2. 设聚点 a 是解析函数 $g(z)$ 的孤立零点，因而必存在一个 δ，使得 $0<|z-a|<\delta$ 时，$g(z)\neq 0$。

但 a 又是点数列的聚点，意味着对任意 δ，在 $|z-a|<\delta$ 内必然存在属于点数列的点。

也即：对任意 δ，$|z-a|<\delta$ 内必然存在零点，这与 a 是孤立零点矛盾，故 a 不是孤立零点。

解析函数只有当其恒为零时，才存在非孤立零点，从而在 G 内，$g(z)\equiv 0 \implies f_1(z)=f_2(z)$

- 解析延拓的唯一性。

解析函数的唯一性必然导致解析延拓的唯一性。

设区域 g 内或曲线 L 上的解析函数 $f(z)$，经不同的延拓方法延拓到 G，$g\in G$，不同的延拓方法得到 G 内的解析函数分别为 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$。

因为 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 都是 $f(z)$ 的解析延拓，故在区域 g 内 $F_1(z)=F_2(z)$，区域 g 或曲线 L 上必存在聚点，

据上一定理，在区域 G 内 $F_1(z)=F_2(z)$

- 解析函数唯一性定理的推论

▲ 设函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在区域 G 内解析且在其中某一点的邻域或在某一条曲线上 $f_1(z)=f_2(z)$，则在整个区域 G 内，$f_1(z)=f_2(z)$

例：$f_1(z)=\sin 2z$，$f_2(z)=2\sin z\cos z$ 在复平面解析且在实轴上相等，故在全复平面 $\sin 2z=2\cos z\sin z$

同理：有 $\sin^2 z+\cos^2 z=1$, $\cos 2z=\cos^2 z-\sin^2 z$ 等等在实轴上成立的三角函数关系在复平面都成立。

实变量的三角函数关系对复变量三角函数也成立。

▲ 设函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在区域 G 内解析且在其中某一点 a，$f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 及其各阶导数相等，则在区域 G 内 $f_1(z)=f_2(z)$。

因各阶导数都相等，在 a 点邻域作 Taylor 展开，二者相等。

故在此邻域，$f_1(z)=f_2(z)$，据上一推论，在区域 G 内，$f_1(z)=f_2(z)$。

- 应用实例：Ewald 求和（Phys. Rev. **124**, 1786 (1961)）

固体物理中，利用多重散射法计算电子能带（或计算光子晶体能带）要用到以下求和

$$G(z,\vec{r})=-\frac{1}{4\pi}\sum_s \frac{\exp\left[i z\left|\vec{r}-\vec{r}_s\right|\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}_s\right|}\exp\left[i\vec{k}\cdot\vec{r}_s\right],\qquad \vec{r}_s=n_1\vec{e}_x+n_2\vec{e}_y,\quad \text{求和}\sum_s\text{对所有整数 } n_1 \text{ 和 } n_2 \text{ 进行} \tag{1.3}$$

人们知道，当复变量 z 取实数或上半复平面的值时，

级数是收敛的，且和函数 $G(z,\vec{r})$ 是解析函数（除个别奇点之外）。

但是，求和式 (1.3) 收敛极慢，

可能要计算几万项甚至几十万项才能收敛（准确到所要求的有效数字的位数）。

不妨用 *Mathematica* 试一试 $z=1$ 时，要求和式 $G(1,\vec{r})$ 有 7 位有效数字相同，需要多少项求和。

Ewald 利用 $\dfrac{e^{izx}}{x}$ 的一个积分表示提出一种求和方法，得到一个新的表达式，只需求几十项即可收敛。

但是，该积分表示仅对 $\mathrm{Im}\,z>0$ 成立，那么对于实数 z，能否使用 Ewald 表达式？Yes!

因为 $G(z,\vec{r})$ 解析，Ewald 表达式也解析，它们在 $\mathrm{Im}\,z>0$ 区域相等，必然在包括实轴的整个解析区域相等。

当然，物理上的函数均被认为是解析的（相变点除外）。

Ewald 求和法将作为一个讨论课内容，在讨论了Hankel函数的积分表示之后讨论。

5.4 Γ 函数

在实变函数中，曾引入自变量为实数的 Γ 函数

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{x-1}\,d t,\quad \text{积分在 } x>0 \text{ 收敛。}$$

能否推广到复变量，即：$x \Longrightarrow z$？ —— 借助解析延拓？

解析区域？初等函数除分母为零的点及无穷远点之外解析， Γ 函数不是初等复变函数，那么它在什么区域是解析的呢？

定义：复变量的 Γ 函数，也称为第二类 Euler 积分：

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{z-1}\,d t,\quad \text{约定积分变量 } t \text{ 在正实轴上 } \arg t=0 \tag{1.4}$$

- 既然积分中 t 实际上可看成实变量，为何要约定在正实轴上 $\arg t=0$？

  因为 z 是复变量，$t^{z-1} \xRightarrow{\text{定义}} e^{(z-1)\ln t}=e^{(z-1)(\ln|t|+i\arg t)}$，故需要约定 $\arg t$ 的值才能确定 $t^{z-1}=e^{(z-1)\ln|t|}$

- 通过第二类 Euler 积分 (1.4) 式，实际上定义了一个 特殊函数，那么其解析区域在哪里？

为讨论第二个问题，需要一些定理。

如何判断含参量积分的解析性

前面学过，要判断一个通过（含复数参量）积分来定义的复变函数是否解析，方法是：化成 Cauchy 型积分。

$F(z)=\int_L \frac{\phi(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$，当 z 不在积分路径 L 上且 $\phi(\xi)$ 在 L 上连续时，则 $F(z)$ 解析，

且：$F'(z)=\int_L \frac{\phi(\xi)}{(\xi-z)^2}\,d\xi$ （可简单地看成，对 ξ 的积分与对 z 的求导可交换次序）

但 (1.4) 式：$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{z-1}\,d t$ 涉及广义积分（积分到无穷），

要判断其是否解析，还需要另外一些定理。

先看正常积分情况：

定理一：设 1. $f(t,z)$ 是实变量 $t\in[a,b]$，复变量 $z\in\overline{G}$ 的连续函数；

2. 对 $\forall\, t\in[a,b]$，$f(t,z)$ 对 $z\in\overline{G}$ 单值解析，

则：$F(z)=\int_a^b f(t,z)\,d t$ 在 G 内解析，且 $F'(z)=\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\,d t$ （积分求导可交换次序）

比较 Cauchy 型积分 ：$F(z)=\int_L \frac{\phi(t)}{t-z}\,d t$，相当于 $f(t,z)=\frac{\phi(t)}{t-z}$ 且积分路径 L 落在在实轴

证明：因为 $f(t,z)$ 在 $\overline{G}$ 上单值解析，对 $\forall\, z\in G$，可利用Cauchy公式，

$f(t,z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t,\xi)}{(\xi-z)}\,d\xi$，其中 C 为在 $\overline{G}$ 上包围 z 点的闭合回路 （z 不在 C 上）

$$F(z)=\int_a^b f(t,z)\,d t=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b d t\oint_C \frac{f(t,\xi)}{(\xi-z)}\,d\xi \quad \text{（积分区间有限的连续函数，可交换积分次序）}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{d\xi}{(\xi-z)}\int_a^b f(t,\xi)\,d t=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\phi(\xi)}{(\xi-z)}\,d\xi$$

其中：$\phi(\xi)=\int_a^b f(t,\xi)\,d t$ 连续，故上式是一个 Cauchy 型积分，$F(z)$ 解析。

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\phi(\xi)}{(\xi-z)^2}\,d\xi \quad \text{（利用了 Cauchy 型积分的求导法则）}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{d\xi}{(\xi-z)^2}\int_a^b f(t,\xi)\,d t \quad \text{（交换积分次序）}$$

$$= \int_a^b dt\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t,\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi\right]$$ （蓝色部分利用 Cauchy 公式）

$$= \int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt$$

- 该定理可推广到复变量 t 情形

$F(z) = \int_C f(t,z)\,dt$, C 为分段光滑曲线，

对 $t \in C$, $z \in \overline{G}$, $f(t,z)$ 连续并且对 $\forall\, t \in C$，$f(t,z)$ 是 z 的解析函数，则 $F(z)$ 解析。

理解为：$F(z) = \int_C f(t,z)\,dt$ 是否解析？

最终作为 z 的函数 $F(z)$ 解析，自然会想到最好 $f(t,z)$ 是 z 的解析函数；

要对另一复变量 t 积分，自然想到最好 $f(t,z)$ 是 t 的连续函数 （可积的充分条件）

再看反常积分情况：

定理二：设 1. $f(t,z)$ 是实变量 $t \in [a, +\infty)$，复变量 $z \in \overline{G}$ 的连续函数，

2. 对 $\forall\, t \in [a, +\infty)$，$f(t,z)$ 对 $z \in \overline{G}$ 单值解析，

3. 积分 $\int_a^{+\infty} f(t,z)\,dt$ 对 $z \in G$ 内闭一致收敛（注意比较级数的一致收敛与积分的一致收敛概念），

也即：$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists$ 与 z 无关的 $T(\varepsilon)$，使得对任意的 $T_2 > T_1 > T(\varepsilon)$，有 $\left|\int_{T_1}^{T_2} f(t,z)\,dt\right| < \varepsilon$，

则：$F(z) = \int_a^{+\infty} f(t,z)\,dt$ 在 G 内解析，且 $F'(z) = \int_a^{+\infty}\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt$（积分求导可交换次序）

关于第 3 个条件的理解：既然是反常积分，就有积分是否收敛问题 （正常积分只要被积函数连续，总是收敛的）

因为积分式还含有 z，自然会想到要求内闭 一致收敛。为什么？

（Weierstrass 定理 对你说："我还在原地等你，难道你已忘记曾经来过这里？"）

证明：与上一定理之区别，在于 $b \to +\infty$。因此多了第三个条件：要求积分在 G 内闭一致收敛。

证明的方法是将积分写成复变函数级数形式，

如果级数的每一项解析且级数内闭一致收敛，则据 Weierstrass 定理，级数的和函数解析。

为此引入单调上升数列：$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k < a_{k+1} < \ldots$，其中 $a_0 = a$，$\lim\limits_{k\to\infty} a_k = +\infty$

并定义积分：$u_k(z) = \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t,z)\,dt$，则积分 $\int_a^{+\infty} f(t,z)\,dt$ 就可写成复变函数级数形式

$$F(z) = \int_a^{+\infty} f(t,z)\,dt = \int_a^{a_1} f(t,z)\,dt + \int_{a_1}^{a_2} f(t,z)\,dt + \int_{a_2}^{a_3} f(t,z)\,dt + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$$

如能证明这个级数一致收敛，再加上级数的每一项解析，由 Weierstrass 定理，$F(z)$ 就解析。

根据定理一，该无穷级数的每一项 $u_k(z)$ 都是解析的，要证明"级数和" $F(z)$ 解析，只需级数"内闭一致收敛"。

已知的条件是：积分在 G 内闭一致收敛，即：

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists$ 与 z 无关的 $T(\varepsilon)$，使得对任意 $T_2 > T_1 > T(\varepsilon)$ 时，对任意 $z \in \left(G \text{ 内的任意闭区域}\right)$

有：$\left|\int_{T_1}^{T_2} f(t,z)\,dt\right| < \varepsilon$，

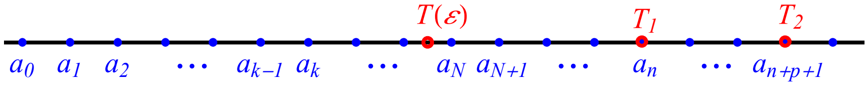
因为没有给出具体函数形式，这里无法通过找优级数或找另一个一致收敛级数乘以一个有界函数证明一致收敛。

只能求助于Cauchy判据，而 级数一致收敛的 Cauchy 判据 是：

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists$ 与 z 无关的 $N(\varepsilon)$，使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时，对任意 $z \in G$ 内的闭区域和任意自然数 p，均有 p 项和

$$s_p = |S_{n+p}(z) - S_n(z)| = \left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(z)\right| < \varepsilon$$

下面就是把积分一致收敛和级数一致收敛关联起来 。从积分一致收敛推出级数一致收敛 。



已知积分一致收敛 ，对 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\ T(\varepsilon)$，使得对任意的 $T_2 > T_1 > T(\varepsilon)$，有 $\left|\int_{T_1}^{T_2} f(t, z)\, dt\right| < \varepsilon$，

如上图，取 $a_N > T(\varepsilon)$，在构造了正数数列 $\{a_k\}$ 之后，由 $u_k(z) = \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t, z)\, dt$

p 项和又可化为：$s_p = \left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(z)\right| = \left|\int_{a_n}^{a_{n+p+1}} f(t, z)\, dt\right| = \left|\int_{T_1}^{T_2} f(t, z)\, dt\right| < \varepsilon$

注：这里 T_1 与 T_2 是在构造了正数数列 $\{a_k\}$ 并给定 p 之后，再令 $T_2 = a_{n+p+1}$，$T_1 = a_n$

而 a_N 是在构造了正数数列 $\{a_k\}$ 并给定 ε 之后，因积分一致收敛 ，故存在 $T(\varepsilon)$，再取 $a_N > T(\varepsilon)$

故级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) = F(z)$ 在 $z \in G$ 里“内闭一致收敛”，并且因为级数的每一项都解析

$\Longrightarrow$ $F(z)$ 解析且可逐项求导 ，又由本节 定理一：$u_k'(z) = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\, dt$

$\Longrightarrow$ $F'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\, dt = \int_a^{\infty} \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\, dt$

Γ 函数属于第二个定理所涉及的反常积分情况，但又不完全是 定理二 情况。

$\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$ 的解析区域：不含虚轴的右半平面

直接由实变函数推广的 $\Gamma(z)$ 函数为 (1.4) 式，还是不能直接应用 定理二，因为被积函数在 $t = 0$ 时发散，涉及另一种反常积分。故分解为：

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = \int_0^{1} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt + \int_1^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \tag{1.5}$$

先看 (1.5) 式右边第二项：$\int_1^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$ 在全平面解析（不含无穷远点）

第二项的被积函数满足定理二的前两个条件，即：$f(t, z)$ 连续，$f(t, z)$ 在全 z 平面单值解析函数（注意已定义 $\arg t = 0$）。

若能再证明积分在某区域内闭一致收敛，则第二项在对应区域解析。下证之。

如何证明积分一致收敛？正如定理二中所讨论，积分写成级数形式，

因而可用类似于复变函数级数一致收敛的判据：找一个优级数。

何为优级数：一个与 z 无关、每一项都大于复函数级数对应项的模、且收敛的级数。

现在，对应于积分，相当于级数的每一项都写成积分，应判断是否存在“优被积函数”，

也即：判断是否存在一个与 z 无关的，大于原被积函数的模、且积分收敛（即对应于级数收敛）的正的实函数。

当 $\begin{cases} 1 \le t < \infty \\ \arg t = 0 \end{cases}$ 时：$|f_2(t, z)| = \left|e^{-t}\, t^{z-1}\right| = \left|e^{(z-1)\ln t} \Big/ \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k / k!\right)\right| \le \left|\frac{t^{x-1}\, e^{i y \ln t}}{t^n / n!}\right|$

其中利用了 $\arg t = 0$, $\left|e^{i y \ln t}\right| = 1$, 而 n 可以为任意正整数

对 $z = x + i\,y$ 在复平面内的任意内闭区域 $\overline{G}$，其实部 $x \le x_0$，从而

$|f_2(t, z)| \le \left|\frac{t^{x-1}}{t^n / n!}\right| \le n!\, t^{x_0-1-n} = g_2(t)$，$g_2(t)$ 在 $z \in \overline{G}$ 时与 z 无关，且大于原被积函数的模 ，

只需取足够大的 n，积分 $\int_1^{+\infty} g_2(t)\,dt = n!\int_1^{+\infty} t^{x_0-1-n}\,dt$ 收敛。

故对 z 在复平面内的任意内闭区域，$f_2(t, z)$ 存在“优被积函数”，

$\int_1^{\infty} e^{-t}\,t^{z-1}\,dt$ 在复平面内“内闭一致收敛”。

注意：这里是证明“内闭一致收敛”，因此，对应于现在复平面上任意画一个闭区域 $\overline{G}$，

对此闭区域，自然会有最大的 x_0（区域最右边的点），从而在证明时可取 $n > x_0$，保证积分收敛。

因而 (1.5) 中的第二项在整个复平面内满足 定理二的三个条件，即它在整个复平面内解析。

再看 (1.5) 式右边第一项：$\int_0^1 e^{-t}\,t^{z-1}\,dt$ 在右半平面解析（不含虚轴）

第一项的被积函数在 $t = 0$ 时发散，不宜应用定理一，作变换：$t = 1/s$，则

$$I_1 = \int_0^1 e^{-t}\,t^{z-1}\,dt = \int_1^{+\infty} e^{-1/s}\,s^{-z-1}\,ds$$

提示用定理二，显然被积函数满足定理二的前两条件，第三个条件如何？

应找“优被积函数”证明在右半平面“内闭一致收敛”

当 $\begin{cases} 1 \le s < \infty \\ \arg s = 0 \end{cases}$ 时：$|f_1(s, z)| = \left|e^{-1/s}\,s^{-z-1}\right| \le \left|e^{(-z-1)\ln s}\right| = s^{-x-1}$，其中利用了：$e^{-1/s} \le 1$

对 z 在右半平面内的任意内闭区域 $\overline{G}$，其实部 $x \ge \delta > 0$，

故：$|f_1(s, z)| \le s^{-x-1} \le s^{-\delta-1} = g_1(s) \implies$ 积分 $\int_1^{+\infty} g_1(s)\,ds = \int_1^{+\infty} s^{-\delta-1}\,ds$ 收敛

故对 z 在右半平面内的任意内闭区域，$f_1(t, z)$ 存在“优被积函数”，$\int_0^1 e^{-t}\,t^{z-1}\,dt$ 在右半平面内“内闭一致收敛”。

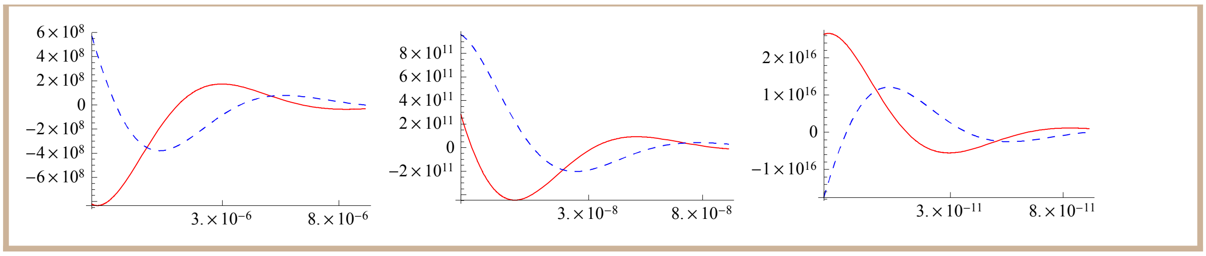
从而 (1.5) 式中的第一项在整个右半平面内满足 定理二 的三个条件，即它在右半平面内（不含虚轴）解析。

$\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{z-1}\,dt$ 的解析延拓：Gamma 函数

(1.5) 式中定义的 $\Gamma(z)$ 函数仅对 $\mathrm{Re}\,z > 0$ 解析，定义仅适用于 $\mathrm{Re}\,z > 0$，实际上对 $\mathrm{Re}\,z < 0$，(1.5) 式第一项积分发散。

因为：$I_1 = \int_0^1 e^{-t}\,t^{z-1}\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$，$f(t) = e^{-t}\,t^{z-1}$

```
Clear["Global`*"]
z0 = -0.5 + 3 ⅈ;
f[t_] := ⅇ^-t t^(z0-1);
f1 = LogLinearPlot[{Re[f[t]], Im[f[t]]}, {t, 10^-6, 10^-5},
   Ticks → {{1. × 10^-6, 3. × 10^-6, 8. × 10^-6}, Automatic},
   PlotStyle → {Red, Directive[Blue, Dashed]}, PlotRange → All];
f2 = LogLinearPlot[{Re[f[t]], Im[f[t]]}, {t, 10^-8, 10^-7},
   Ticks → {{1. × 10^-8, 3. × 10^-8, 8. × 10^-8}, Automatic},
   PlotStyle → {Red, Directive[Blue, Dashed]}, PlotRange → All];
f3 = LogLinearPlot[{Re[f[t]], Im[f[t]]}, {t, 10^-11, 10^-10},
   Ticks → {{1. × 10^-11, 3. × 10^-11, 8. × 10^-11}, Automatic},
   PlotStyle → {Red, Directive[Blue, Dashed]}, PlotRange → All];
Grid[{{f1, f2, f3}}]
```



如何得到定义域在整个复平面的 $\Gamma(z)$ 函数? —— 解析延拓。

对 $\mathrm{Re}\,z>0$，有

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,dt=\int_1^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,dt+\int_0^1 e^{-t}\,t^{z-1}\,dt$$
$$=\int_1^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,dt+\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 t^k\,t^{z-1}\,dt,$$
$$=\int_1^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,dt+\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{k+z}$$

令新函数

$$g(z)=\int_1^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,dt+\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{k+z}\tag{1.6}$$

观察函数 $g(z)$：

第一项在全复平面解析，

第二项是个级数，该级数在除 $z=0,-1,-2,\ldots$ 外的全复平面 "内闭一致收敛"，

即，第二项在全复平面除孤立奇点 $z=0,-1,-2,\ldots$ 外解析。

因而，$g(z)$ 是一个在全复平面（除了一些孤立奇点外）的解析函数，并且，在 $\mathrm{Re}\,z>0$ 区域，$g(z)=\Gamma(z)$）

故：$g(z)$ 是第二类 Euler 积分 $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,dt$ 在整个复平面的解析延拓

现在就把 $g(z)$ 定义为整个复平面上的 Γ 函数。这个新定义的 Γ 在全复平面（除了一些孤立奇点外）解析。

从而我们也就定义了一个在全复平面除孤立奇点 $z=0,-1,-2,\ldots$ 外解析的函数：$\Gamma(z)$。

据延拓的唯一性，这种延拓是唯一的。利用其它方法做延拓，新的函数必与此相同。

这就是解析延拓的第一个用处：扩大函数的定义域，得到在一个更大的范围内（除一些孤立奇点外）的新解析函数。

我们还可以从 Γ 函数的延拓过程来理解 Ewald 求和：$G(z, \vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\sum_s \frac{\exp\left[i z\left|\vec{r}-\vec{r}_s\right|\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}_s\right|}\exp\left[i\vec{k}\cdot\vec{r}_s\right]$,

我们已知和函数 $G(z, \vec{r})$ 在某区域 D_1： $\operatorname{Im} z \geq 0$ 内除一些孤立奇点外解析，但求和收敛缓慢。

在区域 D_1 的子区域 D_2： $\operatorname{Im} z > 0$ 内，Ewald 导出一个新的表达式（函数），

那么这个新函数就在原区域 D_1： $\operatorname{Im} z \geq 0$ 就等于原来的和函数 $G(z, \vec{r})$。

以下是解析延拓在 Gamma 函数和 Ewald 求和中的思路对比。

	Ewald 求和	Gamma 函数
寻求：	级数 $-\frac{1}{4\pi}\sum_s \frac{\exp\left[i z\left|\vec{r}-\vec{r}_s\right|\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}_s\right|}\exp\left[i\vec{k}\cdot\vec{r}_s\right]$ 在区域 $\operatorname{Im} z \geq 0$ 快速收敛的表达式	一个在全平面 解析 * 的函数
已知：	区域 $\operatorname{Im} z \geq 0$ 级数收敛于 一个 解析 * 函数： $G(z, \vec{r})$	存在这样一个在 全平面 解析 * 的函数
做法：	从 $G(z, \vec{r})$ 出发，在区域 $\operatorname{Im} z > 0$ 导出既快速收敛又在 区域 $\operatorname{Im} z \geq 0$ 是 z 的解析 * 函数的表达式 注意：推导仅在 $\operatorname{Im} z > 0$ 成立 结果却在 $\operatorname{Im} z \geq 0$ 解析 *	从第二类 Euler 积分： $\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$ 出发， 在区域 $\operatorname{Re} z > 0$ 导出一个 在全平面 解析 * 的函数： $g(z)$ 注意：推导仅在 $\operatorname{Re} z > 0$ 成立， 结果 $g(z)$ 却在全平面 解析 *
结论：	该在 区域 $\operatorname{Im} z \geq 0$ 的 z 的 解析 * 函数 的表达式即为所求的快速收敛表达式	这个在全平面 解析 * 的函数： $g(z)$ 即为所求的 Gamma 函数

*： 此处的 “解析 *” 是指出孤立奇点之外的解析函数 。

当然，这并不表明，人们总是可以将在某些特定区域内导出的公式 随意“延拓” 到更大的区域。

这里需要以下两个条件才能保证延拓的正确性：

1. 原来的函数和导出的函数都必须是解析的。所谓解析延拓，就是解析才能延拓。
2. D_1 与 D_2 的交叠部分是一个区域、一条曲线，或者，至少是一个有聚点的点集（当然隐含了无穷多点的意思）。

Gamma 函数的其他表示

Gamma 函数是我们接触的第一个特殊函数，作为一种特殊函数，它可以有许多不同的等价表示。

积分表达式 (1.4) 仅仅是 Gamma 函数在某个特殊区域内（ $\operatorname{Re} z > 0$）的一种表示，Gamma 函数还可以表示为：

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt, \quad \operatorname{Re} z > 0,\ \arg t = 0, \quad \text{积分表示 （第二类 Euler 积分）}$$

$$= \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt + \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{k+z}, \quad \text{已经过解析延拓 } z \neq -n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}n^z = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{(z)_{n+1}}, \quad \text{Euler 极限表示}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\,e^{\gamma z}\prod_{k=1}^\infty\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k} \qquad \text{Weierstrass 乘积表示}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{k=1}^\infty\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^z\right] \quad \text{Euler 乘积表示}$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = 0.5772156649\ldots \text{ 称为 Euler–Mascheroni 常数，是一个无理数 。}$$

注： $(z)_{n+1} \equiv z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)$ 称为 Pochhammer 符号

```
N[EulerGamma, 80]
```

```
0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576723488486772677766467
```

几种表示的等价性

- 积分表示等价于极限表示

考虑含参数的积分

$$F(z,\,n)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt,\quad \mathrm{Re}\,z>0,\ n\text{ 为正整数}$$

当 $n\to\infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}F(z,\,n)=\int_0^\infty\left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}\,dt=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,dt$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}F(z,\,n)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,dt}\tag{1.7}$$

另一方面：$F(z,\,n)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt=n^z\int_0^1(1-u)^n\,u^{z-1}\,du$，　其中令：$t=u\,n$

$$I(n,\,z)=\int_0^1(1-u)^n\,u^{z-1}\,du=(1-u)^n\left.\frac{u^z}{z}\right|_0^1+\frac{n}{z}\int_0^1(1-u)^{n-1}\,u^z\,du=\frac{n}{z}I(n-1,\,z+1)$$

递推：$I(n,\,z)=\frac{n}{z}I(n-1,\,z+1)=\frac{n(n-1)\cdots 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}I(0,\,z+n)=\frac{n\,!}{(z)_{n+1}}$

其中：$I(0,\,z+n)=\int_0^1 u^{z+n-1}\,du=\frac{1}{z+n}$，

Pochhammer 符号：$(z)_n=\overbrace{z\,(z+1)\cdots(z+n-1)}^{n\text{个因子相乘}}$，$(z)_0=1$，$(z)_1=z$，$(z)_2=z(z+1)$

从而：$F(z,\,n)=\frac{n\,!}{(z)_{n+1}}n^z$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}F(z,\,n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,!}{(z)_{n+1}}n^z}\tag{1.8}$$

联立 (1.7) 与 (1.8)：$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,dt=\lim_{n\to\infty}F(z,\,n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,!}{(z)_{n+1}}n^z$

- 极限表示等价于乘积表示

从极限表示出发：

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,!\,n^z}{(z)_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(n\,!/(z(z+1)\,(z+2)\,...\,(z+n)))\,n^z=\lim_{n\to\infty}\frac{n^z}{z}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1},$$

求倒数

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{z}{n^{-z}}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{z}{k}\right),\quad\text{利用：}n^{-z}=e^{-z\ln n}\text{ 及 }e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}=\prod_{k=1}^n e^{z/k}$$

$$=z\lim_{n\to\infty}e^{(-\ln n)\,z}\,e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}$$

$$=z\lim_{n\to\infty}e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)z}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}$$

$$= z\, e^{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)z} \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}$$

$$= z\, e^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k} = \text{Weierstrass 乘积表示}$$

其中：$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = 0.5772156619\ldots$

- 两种乘积表示的等价性，参见 Whittaker & Watson, A modern course of analysis, §12.11

Gamma函数的基本性质

基本性质：

$\Gamma(1) = 1$

$z = 1$ 代入 积分表示 $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, d\,t$ 即得

$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ 常被称为Gamma 函数满足的差分方程

由 极限表示：$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)(z+n+1)}\,n^{z+1}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\,z}{(z+n+1)}\;\frac{n!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}\,n^{z} = z\,\Gamma(z)$$

由 积分表示：$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}\,t^{z}\,d\,t = -t^{z}\,e^{-t}\Big|_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,d\,t$

$= z\,\Gamma(z)$， 推导过程中利用了 $\mathrm{Re}\,z > 0$

- 以上仅在 $\mathrm{Re}\,z > 0$ 区域证明 $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$，如果已经用 (1.6) 定义了一个在全复平面除孤立奇点 $z = 0, -1, -2, \ldots$ 外解析的函数，则等式左右两边均为解析函数，我们在 $\mathrm{Re}\,z > 0$ 区域证明其相等，根据解析延拓原理，就是证明了它们在整个解析区域（即除 0 与负整数外的整个复平面）相等。
- 有的教材仅仅利用 积分表示：$\int_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,d\,t$ 定义一个在 $\mathrm{Re}\,z > 0$ 区域解析的函数，再利用

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,d\,t, & \mathrm{Re}\,z > 0 \\ \frac{\Gamma(z+1)}{z}, & -1 < \mathrm{Re}\,z \le 0,\ z \ne 0 \end{cases}$$ 定义一个在 $\mathrm{Re}\,z > -1$ 区域除 $z = 0$ 外解析的函数，

由此定义的函数在 $z = 0$ 是单极点，且留数 $\mathrm{Res}\,\Gamma(0) = 1$。

类似地，进一步定义

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,d\,t, & \mathrm{Re}\,z > 0 \\ \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}, & -2 < \mathrm{Re}\,z \le 0,\ z \ne 0, -1 \end{cases}$$ 则该函数在 $\mathrm{Re}\,z > -2$ 区域除 $z = 0, -1$ 外解析

且在单极点 $z = 0, -1$ 的留数为 $\mathrm{Res}\,\Gamma(0) = 1,\ \mathrm{Res}\,\Gamma(-1) = -1$

以此类推，可以将由积分式 (1.4) 定义的 Gamma 函数延拓到整个复平面，

延拓的函数除单极点 $z = 0, -1, -2, \ldots$ 外在全平面解析，$\mathrm{Res}\,\Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}$

由此定义的 Γ 函数与 (1.6) 式的 $g(z)$ 当然一致，因为解析延拓是具有唯一性 。

它们都在整个复平面除单极点 0 与负整数点之外解析，且在单极点的留数：$\mathrm{Res}\,\Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}$

- 推论：对正整数 n，$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$，故 Gamma 函数也被称为阶乘函数，

或反过来理解，把仅对正整数有意义的阶乘拓展为一个复变函数

- 推论：对负整数 $-n$，可理解为

$$\frac{1}{\Gamma(-n)}=\frac{1}{(-n-1)!},\quad 而：\frac{1}{\Gamma(-n)}=\lim_{z\to -n}\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{z\to -n}\frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{\Gamma(z+n+1)}=0$$

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(-n)}=\frac{1}{(-n-1)!}=0}$$ —— 负整数的阶乘为无穷，其倒数为 0。

$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ 也称 互余宗量关系

- 此等式最简单的证明是在 $0<x=\mathrm{Re}\,z<1$ 的实轴上利用积分表示通过变量代换进行。

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt\int_0^\infty e^{-s}\,s^{-x}\,ds=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s+t)}\left(\frac{t}{s}\right)^x\frac{1}{t}\,dt\,ds$$

$$变量代换：\xi=s+t,\quad \eta=\frac{t}{s},\quad J=\frac{\partial(s,t)}{\partial(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial s}{\partial \xi} & \frac{\partial s}{\partial \eta}\\ \frac{\partial t}{\partial \xi} & \frac{\partial t}{\partial \eta}\end{vmatrix}=\frac{\xi}{(\eta+1)^2},\quad dt\,ds=J\,d\xi\,d\eta$$

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\xi}\,\eta^x\,\frac{1+\eta}{\xi\eta}\overbrace{\frac{\xi}{(1+\eta)^2}}^{\text{Jacobi 行列式}J}\,d\xi\,d\eta=\int_0^\infty e^{-\xi}\,d\xi\overbrace{\int_0^\infty\frac{\eta^{x-1}}{\eta+1}\,dx}^{\text{例题 (1.1) 式}}=\frac{\pi}{\sin\pi x}$$

以上在 $0<x<1$ 的一段实轴证明了等式，又由于等式两边均为解析函数，据解析延拓原理，二者在解析区域相等。

```
Clear["Global`*"]
eq1 = ξ - (s + t);
eq2 = η - t / s;
r = Solve[{eq1 == 0, eq2 == 0}, {s, t}];
r1 = r[[1]]
Jm = {{D[s /. r1, ξ], D[s /. r1, η]}, {D[t /. r1, ξ], D[t /. r1, η]}};
J = Simplify[Det[Jm]]
f[s_, t_] := e^-(s+t) (t/s)^x 1/t
Integrate[J * f[s, t] /. r1, {ξ, 0, ∞}, {η, 0, ∞}]
```

$$\left\{s\to\frac{\xi}{1+\eta},\ t\to\xi-\frac{\xi}{1+\eta}\right\}$$

$$\frac{\xi}{(1+\eta)^2}$$

π Csc[π x]

- 此等式的另一种证明方法是利用Weierstrass 乘积表示

$$\Gamma(z)\,\Gamma(-z)=\left[z^{-1}\,e^{-\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}e^{z/k}\right]\times\left[-z^{-1}\,e^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{k}\right)^{-1}e^{-z/k}\right]$$

$$= -\frac{1}{z^2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)^{-1}, \quad \text{利用：} \boxed{\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right)}$$

$$= -\frac{\pi}{z \sin \pi z}, \quad \text{再利用 } \Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha}, \ \alpha = -z$$

$$-\frac{\pi}{z \sin \pi z} = \Gamma(z)\,\Gamma(-z) = \Gamma(z)\,\frac{\Gamma(1-z)}{-z} \Longrightarrow \boxed{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}}$$

看上去很美，但如何证明 $\sin z$ 的无穷乘积表达式 ？

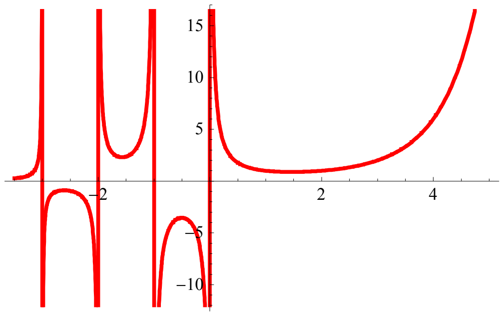
涉及将一个函数展为无限项的乘积 ，参见“两个定理”一节

- 推论：令 $z = \frac{1}{2}$，$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \Longrightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- Gamma函数在全平面无零点

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \neq 0, \quad \text{若 } z = z_0 \text{ 是 Gamma函数的零点，} \Gamma(z_0) = 0, \text{ 则}$$

$$\Gamma(z_0)\,\Gamma(1-z_0) = \frac{\pi}{\sin \pi z_0} \neq 0 \text{ 必导致 } \Gamma(1-z_0) = \infty \Longrightarrow 1 - z_0 = -n \Longrightarrow z_0 = n+1 \Longrightarrow \Gamma(z_0) = n!, \text{ 矛盾。}$$

```
Plot[Gamma[x], {x, -3.5, 5}, PlotStyle → {Red, Thick}]
```



$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\,\pi^{-1/2}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$ 也称 **Legendre 倍乘公式**

证明：见 Gauss 乘法定理的证明 。

$\Gamma(nz) = (2\pi)^{(1-n)/2}\, n^{nz-1/2}\, \Gamma(z)\,\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z + \frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right)$ 也称 **Gauss 乘法定理**

证明：定义函数： $\phi(z) = \frac{1}{\Gamma(nz)}\, n^{nz}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z + \frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = \frac{n^{nz}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right)}{\Gamma(nz)}$

实际上，$\phi(z)$ 是将 Gauss 乘法定理中与 z 有关的部分移到一边而得 。以下证明 $\phi(z)$ 是与 z 无关的常数 。

由 Gamma 函数的 极限表示：$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{(z)_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+z}\,\frac{(n-1)!\, n^z}{(z)_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\, n^z}{(z)_n}$

$$\phi(z) = \frac{n^{nz} \prod_{k=0}^{n-1} \lim_{m\to\infty} \frac{(m-1)!\, m^{z+\frac{k}{n}}}{\left(z + \frac{k}{n}\right)_m}}{\lim_{m\to\infty} \frac{(m-1)!\, m^{nz}}{(nz)_m}}, \quad \text{分子有 } nm \text{ 项 } (z+\alpha) \text{ 形式乘积}$$

$$= \frac{n^{nz} \lim\limits_{m\to\infty} \prod\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(m-1)!\, m^{z+\frac{k}{n}}}{\left(z+\frac{k}{n}\right)\left(z+\frac{k}{n}+1\right)\left(z+\frac{k}{n}+2\right)\cdots\left(z+\frac{k}{n}+m-1\right)}}{\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{(n\,m-1)!\,(n\,m)^{nz}}{(n\,z)_{n\,m}}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\dfrac{n^{nz}\,[(m-1)!]^n\, m^{n\,z+(n-1)/2}}{(z)(z+1)\cdots(z+m-1)\left(z+\frac{1}{n}\right)\left(z+\frac{1}{n}+1\right)\cdots\left(z+\frac{1}{n}+m-1\right)\cdots\left(z+\frac{n-1}{n}\right)\left(z+\frac{n-1}{n}+1\right)\cdots\left(z+\frac{n-1}{n}+m-1\right)}}{\dfrac{(n\,m-1)!\,(n\,m)^{nz}}{(n\,z)(n\,z+1)(n\,z+2)\cdots(n\,z+n\,m-1)}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{[(m-1)!]^n\, m^{(n-1)/2}}{(n\,m-1)!} \frac{(n\,z)(n\,z+1)(n\,z+2)\cdots(n\,z+n\,m-1)}{(z)(z+1)\cdots(z+m-1)\left(z+\frac{1}{n}\right)\left(z+\frac{1}{n}+1\right)\cdots\left(z+\frac{1}{n}+m-1\right)\cdots\left(z+\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(z+\frac{n-1}{n}+m-1\right)}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{[(m-1)!]^n\, m^{(n-1)/2}}{(n\,m-1)!} n^{n\,m}$$ 终于证明了 $\phi(z)$ 与 z 无关！

接下来就好办了， 只要求出 $\phi(z)$ 的值就可以了 。既然 $\phi(z)$ 与 z 无关，则可任选一 z 值求之。

取 $z = z_0 = 1/n$ 求之：

$$\phi(z_0) = \left.\frac{n^{nz}\prod\limits_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma(n\,z)}\right|_{z=z_0} = \frac{n^{n/n}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\cdots\Gamma(1)}{\Gamma(1)} = n\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) > 0$$

$$\phi^2(z_0) = n^2\prod_{k=1}^{n-1}\left[\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{n}\right)\right] = n^2\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\pi}{\sin\frac{k\,\pi}{n}} = \frac{n^2\,\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\,\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\,\pi}{n}} = n\,(2\,\pi)^{n-1}$$

其中利用了： $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin\pi\,z}$ 及 $\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\,\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\,\pi}{n} = \dfrac{n}{2^{n-1}}$ （第一章例题 ）

整理即得： $\phi(z) = \dfrac{1}{\Gamma(n\,z)} n^{nz}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = \phi(z_0) = (2\,\pi)^{(n-1)/2}\,n^{1/2}$

$\Longrightarrow$ Gauss乘法定理： $\Gamma(n\,z) = n^{n\,z-1/2}(2\,\pi)^{(1-n)/2}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)$

补充：两个定理

- 亚纯函数的极点展开（既非Taylor展开，亦非Laurent展开）

亚纯函数 (meromorphic function)：除孤立极点 （极点，不是本性奇点 ） 之外解析的函数 ，例如： $\dfrac{\sin z}{\cos z}$

极点展开定理 ：设亚纯函数 $f(z)$ 在复平面上只有非零单极点 $a_k \neq 0$，其中 $|a_1| < |a_2| < \cdots$， $\mathrm{Res}\, f(a_k) = b_k$，

并且在包围前 n 个单极点的半径为 R_n 的圆周 C_n 上，函数满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f(z)}{R_n}\right| = 0$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \infty$，

则 $f(z)$ 可表为极点展开形式 ： $\boxed{f\,(z) = f\,(0) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{b_k}{z-a_k}+\dfrac{b_k}{a_k}\right)}$

证明：此定理也称 Mittag–Leffler 定理。

展开式不同于Taylor展开或Laurent展开 ，而是在各单极点上展开为连乘积 。

$$I_n = \oint_{C_n}\frac{f(\xi)}{\xi(\xi-z)}\,d\,\xi = 2\,\pi\,i\sum_m \mathrm{Res}\,\varphi(\xi_m) = 2\,\pi\,i\left[-\frac{f(0)}{z}+\frac{f(z)}{z}+\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k(a_k-z)}\right] \tag{1.9}$$

其中：$\varphi(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi(\xi-z)}$ 在 C_n 内有 $(n+2)$ 个单极点：$\xi_m=0,\ z,$ 及 $a_k,\ k=1,2,\ldots,n$

以下证明 $n\to\infty$ 和 $R_n\to\infty$ 时，有 $I_n\to 0$。利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f(z)}{R_n}\right|=0$，可导得：

$$|I_n|\le\oint_{C_n}\frac{|f(\xi)|}{|\xi|\,|(\xi-z)|}|d\xi|\le\oint_{C_n}\frac{|f(\xi)/R_n|}{|(\xi-z)|}|d\xi|\le\varepsilon\frac{2\pi R_n}{(|R_n|-|z|)}\le M\varepsilon\text{，即：}\lim_{n\to\infty}I_n=0$$

$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$ 代入 (1.9) 即得：$f(z)=f(0)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{b_k}{z-a_k}+\dfrac{b_k}{a_k}\right)$。

- 整函数的乘积展开（函数表为无穷项之积，而非无穷项之和）

  整函数 (entire function)：在整个复平面上 （不含无穷远点 ） 解析的函数，例如：$\sin z,\ \cos z,\ \dfrac{\sin z}{z}$

  乘积展开定理：设整函数 $f(z)$ 在复平面上只有非零的一阶零点 $a_k\neq 0$, 其中 $|a_1|<|a_2|<\cdots$,

  并且在包围前 n 个零点的半径为 R_n 的圆周 C_n 上，函数的对数导数 $h(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{h(z)}{R_n}\right|=0$，

  其中 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=\infty$，则 $f(z)$ 可表为乘积展开形式 ：$\boxed{f(z)=f(0)\exp\left[\dfrac{z f'(0)}{f(0)}\right]\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z}{a_k}\right)e^{z/a_k}}$

  证明：因为整函数 $f(z)$ 只有一阶零点 ， 其对数导数 $h(z)=f'(z)/f(z)$ 只有单极点 ， 是亚纯函数 。

  在 $f(z)$ 的任意一个一阶零点 a_k 的邻域，均有：$f(z)=(z-a_k)\,g_k(z)$, $g_k(z)$ 解析且 $g_k(a_k)\neq 0$

  在 a_k 邻域，$h(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{[(z-a_k)\,g_k(z)]'}{(z-a_k)\,g_k(z)}=\dfrac{1}{z-a_k}+\dfrac{g_k'(z)}{g_k(z)}$,

  故 $f(z)$ 的一个一阶零点 a_k 对应于 $h(z)$ 的一个留数 b_k 为 1 的单极点

  $h(z)$ 又满足纯函数极点展开定理的条件 ，故：$h(z)=h(0)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z-a_k}+\dfrac{1}{a_k}\right)$，即：

  $\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{f'(0)}{f(0)}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z-a_k}+\dfrac{1}{a_k}\right)$，两边同时从 $z=0$ 到 z 积分

  $$\text{左}=\int_0^z\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi=\ln f(z)-\ln f(0)=\text{右}=\frac{f'(0)}{f(0)}z+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln(z-a_k)-\ln(-a_k)+\frac{z}{a_k}\right]$$

  注意被积函数含有奇点 ， 积分与路径有关 ， 原函数是多值函数 ， 但下面求指数后多值性自动消失

  上式两边同取指数 ：$f(z)=f(0)\exp\left[\dfrac{f'(0)}{f(0)}z\right]\prod\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(a_k-z)}{a_k}\,e^{z/a_k}$　函数表为无穷乘积

- 实例：

  $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 满足 乘积展开定理 的条件：

  一阶零点 $a_k=k\pi$，$k=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots$

  $h(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}=-\dfrac{1}{z}+\dfrac{\cos z}{\sin z}$ 在 $R_n e^{i\theta}$ 上且 $R_n\to\infty$ 满足 $\dfrac{h(R_n e^{i\theta})}{R_n}\to 0$

  再利用：$f(0)=1,\ \ f'(0)=0,$

  即得：$\dfrac{\sin z}{z}=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z}{k\pi}\right)e^{z/k\pi}\left(1-\dfrac{z}{-k\pi}\right)e^{-z/k\pi}\implies \sin z=z\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$

  $f(z)=\cos z$ 满足 乘积展开定理 的条件：

  一阶零点 $a_k=\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\pi$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots$

$$h(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{\sin z}{\cos z}\text{ 在 }R_n\,e^{i\theta}\text{ 上且 }R_n\to\infty\text{ 满足 }\frac{h\left(R_n\,e^{i\theta}\right)}{R_n}\to 0$$

故：$\cos z=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{(k-1/2)\,\pi}\right)\left(1+\frac{z}{(k-1/2)\,\pi}\right)\implies\cos z=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(k-1/2)^2\,\pi^2}\right)$

Gamma 函数的围道积分表示及渐近表达式：

Gamma 函数的围道积分表示

$$\int_C e^{-\zeta}\,\zeta^{z-1}\,d\zeta=\left(e^{i\,z\,2\pi}-1\right)\Gamma(z)\,,\qquad \Gamma(z)=-\frac{1}{2\,i\sin z\,\pi}\int_C e^{-\zeta}(-\zeta)^{z-1}\,d\zeta$$

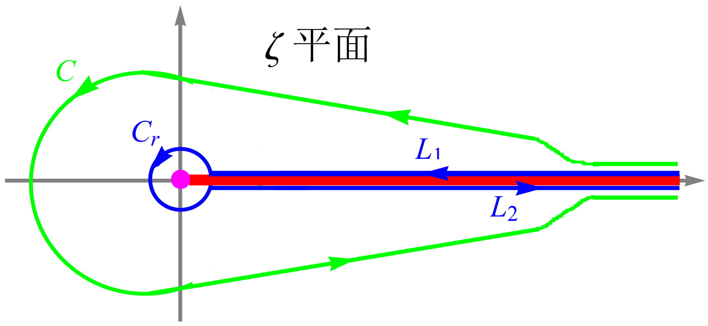
第二类 Euler 积分，(1.4) 式：$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,d\,t$ 仅在 $\operatorname{Re} z>0$ 区域收敛，代表 Gamma 函数。

Weierstrass 乘积表示 和 Euler 乘积表示 可以表示复平面上奇点 （0 和负整数） 之外的任一点的 Gamma 函数。

通常，人们还需要更为有效的围道积分表示 。希望得到对任意 z 皆可用的积分表示 。

为此，考虑如下围道积分 ，其中 z 为复数

$F(z)=\int_C e^{-\zeta}\,\zeta^{z-1}\,d\zeta$，积分围道 C 如下图绿线所示 ，被积函数 $f(\zeta,z)=e^{-\zeta}\,\zeta^{z-1}$。



积分围道 C 从正实轴上缘的 ∞ 出发，左行至原点附近 ，

绕原点一周到达正实轴下缘 ，再右行到正实轴下缘的 ∞ 处。

被积函数 $f(\zeta,z)=e^{-\zeta}\,\zeta^{z-1}$ 是多值函数 ，枝点为 $\zeta=0$ 与 ∞，割线如上图红线 ，围道 C 不穿过割线 。

做了割线之后 ，$f(\zeta,z)$ 就成为单值解析函数 （除 $\zeta=0,\ \infty$ 是枝点、奇点），积分围道在解析区可连续变形 。

因此，可将积分路径变化为 ：$C\longrightarrow L_1+C_r+L_2$，其中 $L_1\,(L_2)$ 沿割线上 （下） 岸，C_r 是半径为 r 的圆弧 。

C_r：$\zeta=r\,e^{i\theta}$，故 $F(z)$ 可化为本节 定理一 形式的积分 ，易证明它满足定理的条件 ，故积分收敛于一个 解析函数 。

L_1 或 L_2：因为在实轴 ，可化为本节 定理二 形式的积分 ，易证明它满足定理的条件 ，积分也收敛于一个 解析函数 。

例如：$\int_{L_1}f(\zeta,z)\,d\zeta=-\int_r^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,d\,t\xRightarrow{\text{令 }r=1}$ (1. 5) 式第二项，全平面解析 。

从而积分 $F(z)=\int_C f(\zeta,z)\,d\zeta=\int_C e^{-\zeta}\,\zeta^{z-1}\,d\zeta$ 在全复 z 平面收敛并代表一个解析函数 。

特别注意：在证明 $F(z)$ 解析这一结论时 ，并没有要求 $r\to 0$，实际上，这时的 r 必须是有限的 。 例如可取 $r=1$

接着，我们求这个全复平面解析的函数 $F(z)$ 与 Gamma 函数 $\Gamma(z)$ 之间的关系 。

在割线上岸规定 ：$\theta\equiv\arg\zeta=0$，因而在割线下岸 ：$\theta=2\pi$

L_1：$\zeta=t\,e^{i\,0}$，$\int_{L_1}f(\zeta,z)\,d\zeta=\int_\infty^r e^{-t}\,t^{z-1}\,d\,t=-\int_r^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,d\,t=-I$

L_2：$\zeta=t\,e^{i\,2\pi}$，$\int_{L_2}f(\zeta,z)\,d\zeta=\int_r^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,e^{i\,z\,2\pi}\,d\,t=e^{i\,z\,2\pi}\,I$，这里 $\boxed{I=\int_r^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,d\,t}$

C_r：利用 小圆弧引理？

要用小圆弧引理，必须要有 $r \to 0$，

$F(z)$ 能否视为 $r \to 0$ 时的积分？可以，因为积分路径可在被积函数的解析区任意变形。

在证明函数解析时，可取 $r = 1$，而在求函数值时，却要让 $r \to 0$，此所谓识时务者为俊杰也。

因此，令 $r \to 0$，即可利用小圆弧引理。当然 $r \to 0$ 时，$\lim_{r\to 0} I = \lim_{r\to 0}\int_r^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = \Gamma(z)$

小圆弧引理 中的 $k = \lim_{\zeta\to 0} \zeta f(\zeta, z) = \lim_{\zeta\to 0} e^{-\zeta}\zeta^z \xrightarrow{\text{当 Re} z>0\text{ 时}} 0$，$\int_{C_r} f(\zeta, z)\, d\zeta = 0$ if $\mathrm{Re}\, z > 0$

注意：仅在 $r \to 0$ 时，在 L_1 与 L_2 的积分才能与 Γ 函数相关联，C_r 的积分才能利用小圆弧引理。

而在证明 $F(z)$ 解析时，r 是有限的；仅仅在要将 $F(z)$ 与 Γ 函数相关联时，才需要用到 $r \to 0$。

综合上述讨论：当 $\mathrm{Re}\, z > 0$ 时，取 $r \to 0$ 的极限，$\lim_{r\to 0} I = \Gamma(z)$

$$F(z) = \int_C e^{-\zeta}\zeta^{z-1}\, d\zeta = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{C_r} = \left(e^{i z 2\pi} - 1\right)\Gamma(z),$$

即：$\boxed{\int_C e^{-\zeta}\zeta^{z-1}\, d\zeta = \left(e^{i z 2\pi} - 1\right)\Gamma(z)}$

我们虽然仅仅在 $\mathrm{Re}\, z > 0$ 时，证明了 $F(z)$ 与 Gamma 函数的关系，但在整个复平面，上式左右两边都是解析函数

（注意 $z = 0$ 或负整数是 $\Gamma(z)$ 的单极点，是 $\left(e^{i z 2\pi} - 1\right)\Gamma(z)$ 的可去奇点，上式右边依然是解析函数）

依据解析延拓原理，上式在整个复平面内成立。只不过当 z 等于整数时，上式无法求出 $\Gamma(z)$。

这里可看到复围道积分的妙处：在证明解析时 r 有限，例如可取 $r = 1$

在与 Γ 函数相关联时令 $r \to 0$ 并仅在 $\mathrm{Re}\, z > 0$ 区域证明等式。

思考：对 $\mathrm{Re}\, z \le 0$，小圆弧段的积分是发散的，这是否与 $F(z) = \int_C e^{-\zeta}\zeta^{z-1}\, d\zeta$ 在全平面解析矛盾？

（答：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

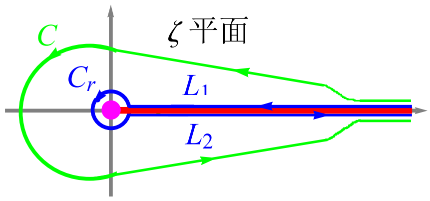
从以上的证明看到，规定割线上下岸 $\arg\zeta$ 分别为 0 与 2π，则 $\int_{L_1} + \int_{L_2} = \left(e^{i z 2\pi} - 1\right)\Gamma(z)$

若规定割线上下岸 $\arg\zeta$ 分别为 $\mp\pi$，似乎能得到 更为对称形式：$\int_{L_1} + \int_{L_2} \sim \left(e^{i z\pi} - e^{-i z\pi}\right)\Gamma(z) \sim \sin z\pi\,\Gamma(z)$

但显然在割线上岸不能规定 $\arg\zeta = \pm\pi$

—— why? 答：

不过，倒是可以规定上岸 $\arg(-\zeta) = -\pi$，那么下岸 $\arg(-\zeta) = \pi$。



为此，考虑：$G(z) = \int_C e^{-\zeta}(-\zeta)^{z-1}\, d\zeta$，积分围道同 $F(z)$ 如上图，被积函数 $g(\zeta, z) = e^{-\zeta}(-\zeta)^{z-1}$。

与 $F(z)$ 的区别在于：可以规定割线上岸 $\theta' \equiv \arg(-\zeta) = -\pi$，从而下岸 $\theta' = \pi$

$-\zeta$ 是从 ζ 到 0 的矢量，当 ζ 在 L_1 时，矢量 $-\zeta$ 的指向从右到左，辐角可定义为奇数倍的 π。

L_1：$-\zeta = t\, e^{-i\pi}$，$\int_{L_1} g(\zeta, z)\, d\zeta = \int_\infty^r e^{-t}\, t^{z-1}\, e^{-i(z-1)\pi}\, dt = e^{-i z\pi}\int_r^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = e^{-i z\pi} I$

L_2：$-\zeta = t\, e^{i\pi}$，$\int_{L_2} f(\zeta, z)\, d\zeta = \int_r^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, e^{i(z-1)\pi}\, dt = -e^{i z\pi} I$

的确，形式上对称了 （注意小圆弧段的积分仍为 0），从而：

$$G(z)=\int_C e^{-\zeta}(-\zeta)^{z-1}\,d\zeta=\left(e^{-i z\pi}-e^{i z\pi}\right)\Gamma(z),$$

即：$$\boxed{\Gamma(z)=-\frac{1}{2\,i\sin z\pi}\int_C e^{-\zeta}(-\zeta)^{z-1}\,d\zeta}$$

上式称为 Hankel 公式。其本质在于使 Γ 函数的奇点以 $\frac{1}{\sin\pi z}$ 形式暴露无遗 。原来是单极点 。

z 为正整数是 $\int_C e^{-\zeta}(-\zeta)^{z-1}\,d\zeta$ 的零点 （试证之），自然不是 $\Gamma(z)$ 的奇点

进一步利用：$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin z\pi}$ 由 Hankel 公式可导得：$1=\Gamma(1-z)\,\frac{i}{2\pi}\int_C e^{-\zeta}(-\zeta)^{z-1}\,d\zeta$

$$1=\Gamma(1-z)\,\frac{i}{2\pi}\int_C e^{-\zeta}(-\zeta)^{z-1}\,d\zeta\xrightarrow{1-z=z'}\boxed{\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{i}{2\pi}\int_C e^{-\zeta}(-\zeta)^{-z}\,d\zeta}$$

此式就真的可用于表示任意 z 值 （包括整数） 的 Gamma 函数。

并且，因为此式的右边是全平面无奇点的解析函数 ，故可知 $\Gamma(z)$ 无零点。

Gamma 函数的渐近展开（$|z|\to\infty$ 时的近似表达式），也称 Stirling 公式

$|z|\gg1$ 且 $|\arg z|<\pi$ 时，$\Gamma(z)\sim z^{z-1/2}\,e^{-z}\sqrt{2\pi}$；

这就是统计物理中常用的 ： $N\gg1$ 时，$N!\sim\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N\sim\left(\frac{N}{e}\right)^N$

证明：在此仅给出实数 $z=x\gg1$ 时的证明，复数情形的证明将在讨论课中介绍 。

$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-u}\,u^x\,du=\int_0^\infty e^{-u+x\ln u}\,du$, 令 $u=x\,t$, 则：

$$\Gamma(x+1)=x\int_0^\infty e^{-x\,t+x\ln t+x\ln x}\,dt\xrightarrow{\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)}\Gamma(x)=x^x\int_0^\infty e^{x(\ln t-t)}\,dt$$

积分形式：$\boxed{f(x)=\int_a^b h(t)\,e^{x\,g(t)}\,dt}$ 如何计算积分在 $x\gg1$ 时的渐近表达式 ?

分析：如果函数 $g(t)$ 在积分区间 $[a,b]$ 的某一点 t_0 有极大值，

则在 $x\to+\infty$ 时，经指数函数“放大”，函数 $e^{x\,g(t)}$ 必有极其陡峭的峰 。

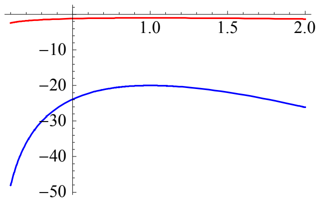
若函数 $g(t)$ 只有这一个极大值且 $h(t)$ 是缓变函数，

那么 $x\to+\infty$ 时的积分值主要由 t_0 附近的一小段所贡献 。

因此，可取这一小段的积分值作为 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的渐近表示 。

现：$h(t)=1$, $g(t)=\ln t-t$ 在 $t=t_0=1$ 有极大值，因此在 $x\gg1$ 时积分可以用 $t_0=1$ 邻域的一段积分近似 。

```
Clear["Global`*"]
g[t_] := Log[t] - t;
h[x_, t_] := x g[t];
Plot[{g[t], h[20, t]}, {t, 1 / 10, 2}, PlotRange → All,
      PlotStyle → {{Red, Thickness[0.005]}, {Blue, Thickness[0.005]}}]
```



$I = \int_0^\infty e^{x(\ln t - t)}\, dt \sim \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} e^{x\, g(t)}\, dt$, 因为积分在 t_0 的邻域进行，可对 $g(t)$ 作 Taylor 展开，仅保留两项，

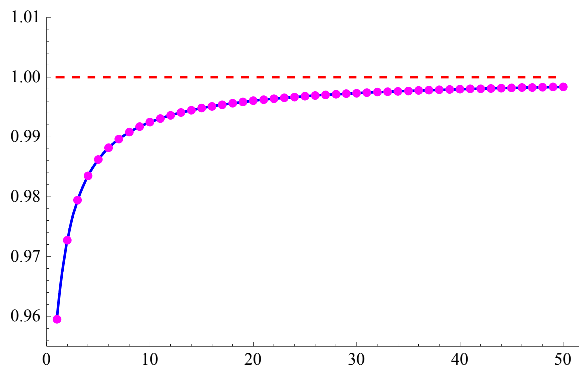
$\sim \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} e^{x\left[-1-\frac{1}{2}(t-1)^2-\ldots\right]}\, dt$, 因为偏离 t_0 点时，指数函数下降极为陡峭，积分区间可拓展为 $-\infty$ 到 ∞

$\sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{x\left[-1-\frac{1}{2}(t-1)^2-\ldots\right]}\, dt$, 现在积分就可轻易计算了

$= e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}(t-1)^2}\, dt = e^{-x}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}$, 其中利用了：$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}u^2}\, du = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}$

从而：$x \gg 1$ 时，$\Gamma(x) = x^x \int_0^\infty e^{x(\ln t - t)}\, dt \sim x^x I \implies \boxed{\Gamma(x) \sim x^{x-1/2}\, e^{-x}\sqrt{2\pi}}$

```
Clear["Global`*"]
g[x_] = Sqrt[2 π] (x + 1)^(x+1-1/2) e^(-x-1) / Gamma[x + 1];
g1 = Plot[{1, g[x]}, {x, 1, 50}, PlotRange → {{0, 51.5}, {0.955, 1.01}},
        AxesOrigin → {0, 0.955},
        PlotStyle → {{Red, Thickness[0.005], Dashed}, {Blue, Thickness[0.005]}}];
tbl = Table[Sqrt[2 π (n + 1)]/e ((n + 1)/e)^n / n!, {n, 1, 50}];
g2 = ListPlot[tbl, PlotStyle → Directive[Magenta, PointSize[Medium]]];
Show[g1, g2]
```

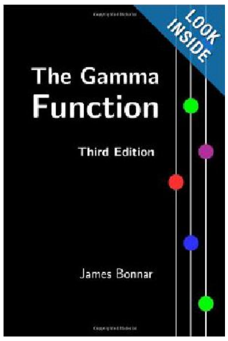


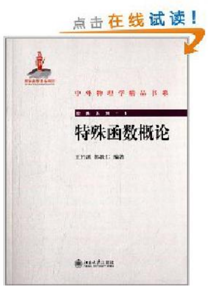
有趣的是：尽管 Gamma 函数似乎是一种特别简单特殊函数，但它却属于一类特别的特殊函数，这类特殊函数不满足任何有理系数的微分方程。

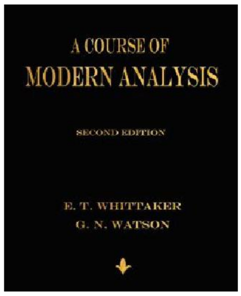
同时，它也是物理上所遇见的很少的几个不能表示为超几何函数或合流超几何函数的特殊函数。

即便是如此简单的特殊函数，完整的讨论也能写满一本书。关于Gamma函数更系统的论述，可参阅以下书籍。

```
(* 把工作目录设置成文件所在的目录 *)
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
g1 = Import["figgammafun2.jpg"];
g2 = Import["figspecialfun.jpg"];
g3 = Import["figcoursemodana.jpg"];
Grid[{{g1, Spacer[50], g2, Spacer[50], g3}}]
```







Psi 函数

Gamma函数的如下乘积形式给其求导带来不便

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} n^z \quad \text{Euler 极限表示}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-z/k} \qquad \text{Weierstrass 乘积表示}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{z}\right] \quad \text{Euler 乘积表示}$$

为此，取对数，使乘积化为求和，方便求导数

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) = z \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} n^z = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} n^z$$

$$\ln\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{n!}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} n^z = \lim_{n\to\infty} [\ln n! + z\ln n - \ln(z+1) - \ln(z+2) - \cdots - \ln(z+n)]$$

求导：

$$\boxed{\frac{d\ln\Gamma(z+1)}{dz} \equiv \psi(z+1)} = \lim_{n\to\infty}\left[\ln n - \frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{(z+2)} - \cdots - \frac{1}{(z+n)}\right]$$

其中 $\psi(z)$ 称为 Psi 函数或 digamma 函数：也就是Gamma函数的对数求一阶导数。进一步改写为

$$\psi(z+1) = \lim_{n\to\infty}\left[\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{(z+2)} - \cdots - \frac{1}{(z+n)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]$$

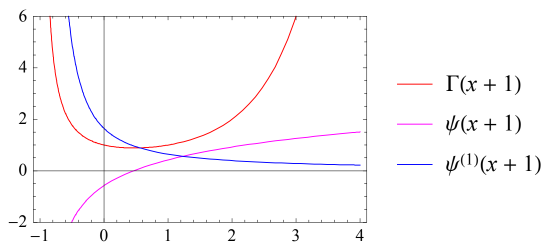
$$= -\overbrace{\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right]}^{\text{Euler - Mascheroni 常数}} - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z+k}-\frac{1}{k}\right] = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{z}{k(z+k)}\right]$$

$$\psi(1) = -\gamma = -0.577\,215\,664\,901\ldots$$

可进一步定义 polygamma 函数

$$\psi^{(m)}(z+1) = \frac{d^m\psi(z+1)}{dz^m} = \frac{d^{m+1}\ln\Gamma(z+1)}{dz^{m+1}} = \frac{d^{m+1}\ln z!}{dz^{m+1}} = -(-1)^m\, m! \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^{m+1}}$$

```
Plot[{Gamma[x + 1], PolyGamma[x + 1], PolyGamma[1, x + 1]}, {x, -1, 4},
    PlotRange → {-2, 6}, PlotStyle → {Red, Magenta, Blue},
    PlotLegends → "Expressions", Frame → True]
```



证明：$\lim_{z\to -n}\frac{\psi(z)}{\Gamma(z)} = -(-1)^n\, n!$　其中 n 为正整数

```
Limit[PolyGamma[z]/Gamma[z], z → -n, Assumptions → {n > 0, n ∈ Integers}]
```

```
-(-1)^n n!
```

由 digamma函数的定义易证：$\psi(z+1) \equiv \dfrac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \dfrac{1}{z} + \psi(z)$ 递推关系

从而：$\psi(z) = \psi(z+n+1) - \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z+1} - \cdots - \dfrac{1}{z+n-1} - \dfrac{1}{z+n}$,

这里因为 $z \to -n$，故把 $\psi(z)$ 写成上式，以保证 $\psi(z+n+1)$ 在 $z \to -n$ 时趋于 $\psi(1)$ 是解析的。

类似于 $\Gamma(z)$，$\psi(z)$ 在 $\mathrm{Re}\, z > 0$ 解析，在 z 为 0 或负整数时是单极点，但留数为 -1，与 $\Gamma(z)$ 不同。

```
Residue[Gamma[z], {z, -n}, Assumptions → {n ≥ 0, n ∈ Integers}]
Residue[PolyGamma[z], {z, -n}, Assumptions → {n ≥ 0, n ∈ Integers}]
```

```
(-1)^-n / n!
```

```
-1
```

另一方面：$\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$，这里也因为 $z \to -n$ 而把 $\Gamma(z)$ 表为：$\Gamma(z+n+1)$

从而

$$\lim_{z\to -n} \frac{\psi(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{z\to -n} \frac{\psi(z+n+1) - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \cdots - \frac{1}{z+n}}{\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}}$$

$$= \lim_{z\to -n} \frac{z(z+1)\cdots(z+n-1)\left[(z+n)\,\psi(z+n+1) - \frac{z+n}{z} - \frac{z+n}{z+1} - \cdots - 1\right]}{\Gamma(z+n+1)},\quad \text{其中：}\psi(z) \text{ 在 } \mathrm{Re}\, z > 0 \text{ 解析}$$

$$= (-n)(-n+1)\cdots(-1) = -(-1)^n\, n!$$

Beta 函数

Beta 函数是由第一类 Euler 积分定义的二元复变函数：

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt, \qquad \mathrm{Re}\, p > 0,\ \mathrm{Re}\, q > 0$$

令 $t = \sin^2\theta$，可得

$$B(p, q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta\, d\theta, \qquad \mathrm{Re}\, p > 0,\ \mathrm{Re}\, q > 0$$

与 Gamma 函数的关系

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{p-1}\, dt \xrightarrow{\text{令：}t=y^2} = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\, y^{2p-1}\, dx,\quad \text{同理：}\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, x^{2q-1}\, dy$$

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y^2}\, y^{2p-1}\, e^{-x^2}\, x^{2p-1}\, dx\, dy,\quad \text{化为极坐标：}\ x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$$

$$= 4 \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi/2} e^{-r^2} (r \sin\theta)^{2p-1} (r \cos\theta)^{2q-1} \, r \, dr \, d\theta$$

$$= 4 \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} \, r^{2p+2q-1} \, dr \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta \, d\theta, \quad 令：t = r^2$$

$$= \Gamma(p+q) \, B(p, q)$$

$$\boxed{B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}}$$

以上证明在 $\mathrm{Re}\, p > 0$, $\mathrm{Re}\, q > 0$ 条件下进行，但上式右边可解析延拓至整个复平面，
故 Beta 函数可解析延拓至整个 p 平面和 q 平面。