BS 期权定价的波动率估计与“波动率微笑”

一、波动率估计

在影响期权定价模型的 5 个因素中，标的股票的现有价格，期权执行价格，期权的到期时间，无风险利率都是可见的，唯有波动率是不可预测的。通常，有两种方法可以对波动率进行估计，即历史波动率(historical volatility)与隐含波动(implied volatility)。其中，历史波动率估计法的逻辑基础在于假定股票波动率水平在过去和未来保持不变，主要包括简单移动平均法和 GARCH 模型方法。

1、方差估计法

计算方式如下：先计算出标的资产价格 S 第 i 天的报酬 u_t ，即 $u_i=\ln(S_i/S_{i-1})$，利用此前一段时间（可选择 3 个月、半年）资产报酬数据，估计日报酬的标准差。即：

$$\sigma^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(u_{n-i}-\bar{u})^2$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(u_{n-i}-\bar{u})^2} \qquad (1)$$

这里，$\bar{u}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}u_{n-i}$ 为 u_i 的算术平均。可以再根据 $\hat{\sigma}=\frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}$ 将日波动率转换为年化波动率，τ 为一年中的交易日天数。需要注意的是，简单移动平均法假设，最近 n 天内不同时期收益率数据的权重是完全相等的。

2、GARCH 模型估计

由于采用方差估计波动率时，并未考虑报酬率会随着时间而改变，因而无法充分反映市场波动率的情形。Engle(1982)提出的 ARCH 模型，条件方差是过去方差的函数，条件方差可随着时间而改变。因此，根据 ARCH 模型的这一性质，可以用 ARCH 模型来研究和解释金融市场的波动率问题。尤其是 Bollerslev (1986)提出的 GARCH 模型，充分显示了估计金融市场波动性的参数精简原则。因而在许多文献中，我们可以发现利用 GARCH (1,1)模型来估计波动性具有相当良好的效果。于是在实际应用中，许多学者建议不断利用 GARCH (1,1)模型，不但符合参数精简原则，又比较能掌握市场上真实的波动性。

3、隐含波动率

隐含波动率是估计股票波动率的另一类方法。它假定 B-S 模型是正确的，并利用期权价格和其他参数反推波动率的数值。隐含波动率的计算要求股票资产都存在相应的期权市场。

在现实市场中，隐含波动率和历史波动率往往不一致。实证研究表明，隐含波动率是对波动率 σ 的一个更好地估计。图 1 是 2006 年 3 月 2 日至 2006 年 11 月 14 日华菱权证的历史波动（方差估计）和隐含波动的对比图。

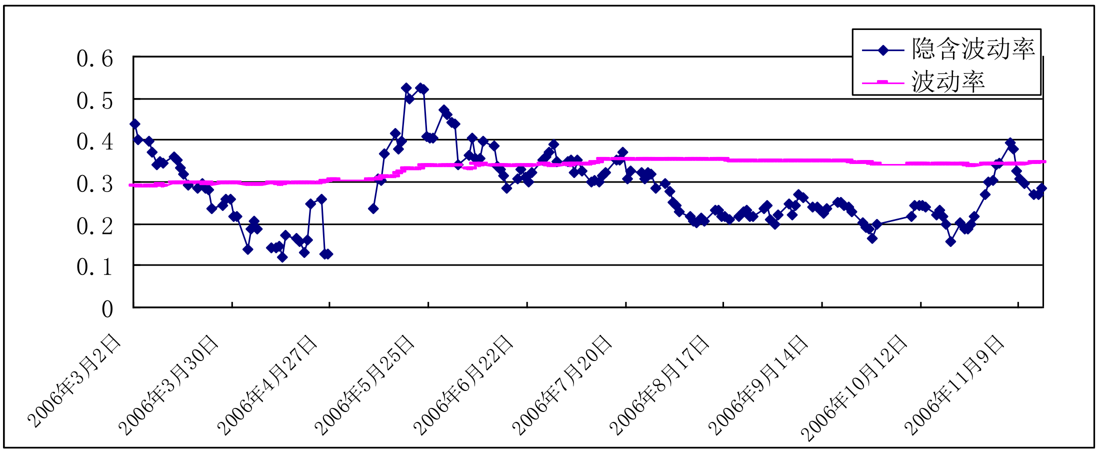

图 1：华菱权证的历史波动和隐含波动

二、波动率微笑和波动率期限结构

BS 公式的另一个重要假设是：标的资产的波动率是一个常数。在现实经济世界中，这个假设显然是无法成立的或存在缺陷的。大量实证研究已经表明，金融资产价格序列的波动率并非恒定常数，而是一个时序波动过程。

因此，应用期权市场价格和 BS 公式推算出来的隐含波动率具有以下两个方向的变动规律：

“波动率微笑”（Volatility Simle）是指隐含波动率会随着期权执行价格不同而不同。由于隐含波动率是执行价格和到期日的函数，特别地，当执行价格等于股票最初价格 S_0时，隐含波动率最小，当执行价格偏离 S_0时，隐含波动率会增加，这种现象通常称为“波动率微笑”。在到期日延长时，隐含波动率也会增加。也就是说，以同一产品为标的，剩余期限固定的期权的隐含波动率随着其执行价格的不同而变化，分别以执行价格和隐含波动率为坐标轴得到的曲线为“波动率微笑”。波动率微笑存在经验表明，BS 定价模型所依赖的假设在现实金融市场中只能部分得到证实。

对于不同金融期权而言，隐含波动率的形状也不尽相同。一般而言，货币期权的隐含波动率大致呈现 U 形。平价期权的波动率最低，而实值和虚值期权的波动率会随着实值或虚值程度的增大而增大，两边比较对称。而股票期权的隐含波动率大致呈现 L 形，并向右下方偏斜（如图 2）。当执行价格上升的时候，波动率下降，而一个较低的执行价格所隐含的波动率则大大高于执行价格较高的期权。由于股票收益率存在明显的负偏斜，因此，股票的波动率微笑的斜率一般都为负。

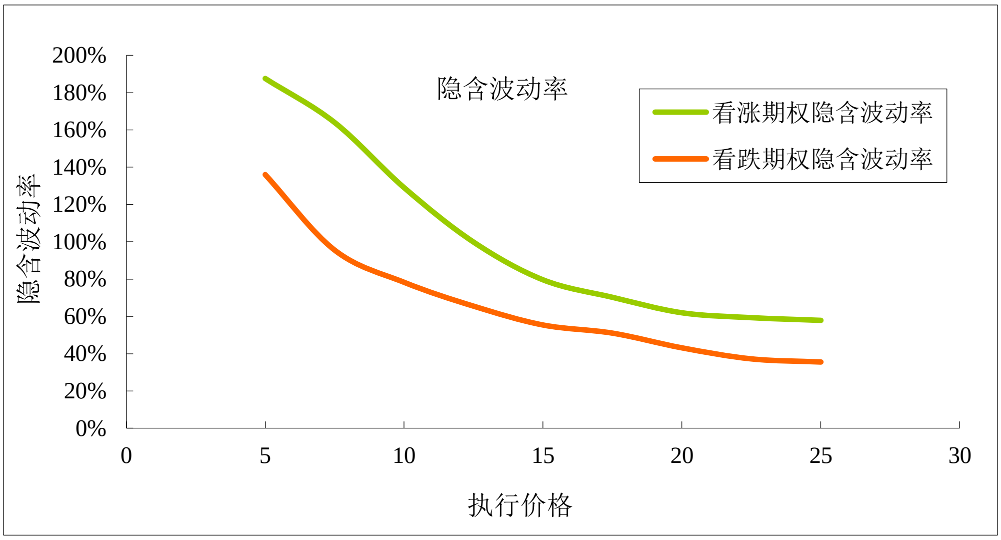

图 2：股票期权的隐含波动率

波动率期限结构（Volatility Term Structure），是指隐含波动率会随期权到期时间不同而变化。具体是指在其他条件不变时，平价期权所对应的隐含波动率随到期日不同所表现出来的变化规律。一般来说，不同的标的资产所表现出来的期限结构具体形状会有所不同，但它们大都具有以下特点：（1）从长期来看，波动率大多表现出均值回归，即到期日接近时，隐含波动率的变化较剧烈，随着到期时间的延长，隐含波动率将逐渐向历史波动率的平均值靠近。（2）波动率微笑的形状也受到期权到期时间的影响。一般而言，期权到期日越近，波动率“微笑”就越显著，到期日越长，不同价格的隐含波动率差异越小，接近于常数。

把波动率微笑与波动率期限结构结合起来，我们就可以得到波动率曲面（Surface），从而考察市场对资产未来分布的预期。波动率曲面，又称为波动率矩阵。假如对某一标的股票 S，期权市场对一组存续期长为 Ti（i=1,2,3,…I）和执行价为 Kj(j=1,2,…. J)的期权有效报价 $C=(T_i,K_j)=C_{ij}$，我们可以计算出相应的隐含波动率 σ_{ij}，如此便可以形成一个用来表达隐含波动率的矩阵。毛娟和王建华（2009）以 S&P500 股指期权为研究对象，在存续期 $T\in[0,2]$ 内采取多项式拟合方法对 2004 年 6 月 7 日的波动率曲面进行数值拟合，拟合的波动率曲面如图 9-8 所示。

表 1：隐含波动率矩阵

	K_1	K_2	K_3	……	K_S	……	K_J
T_1	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}	……	σ_{1S}	……	σ_{1J}
T_2	σ_{21}	σ_{22}	σ_{23}	……	σ_{2S}	……	σ_{2J}
……	……	……	……	……	……	……	……
T_I	σ_{I1}	σ_{I2}	σ_{I3}	……	σ_{IS}	……	σ_{IJ}

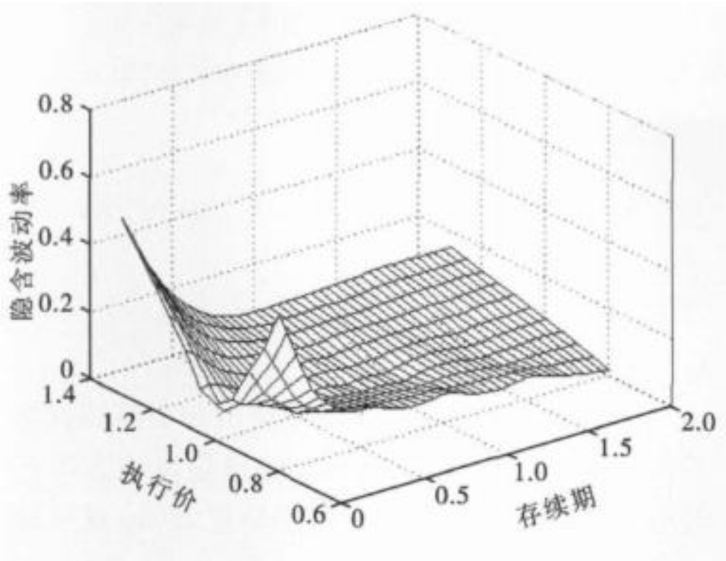

图 3：S&P500 期权的波动率曲面